

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Filip Putar

Zagreb, 2013.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Zdenko Tonković
Dr. sc. Ivica Skozrit

Student:

Filip Putar

Zagreb, 2013.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	20.02.2013. Prilog
Klasa:	602-64/13-6/4
Ur.broj:	15-1763-13-39

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Filip PUTAR**

Mat. br.: 0035177100

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numeričko modeliranje osne pukotine u debelostijenoj cijevi**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Modelling of Axial Crack in Thick-Walled Pipe**

Opis zadatka:

Uslijed niza degradacijskih mehanizama, koji mogu biti posljedica procesa izrade, radnih uvjeta, korozivnih procesa ili sprega više njih istovremeno, dolazi do pojave oštećenja u materijalu cijevi. Eksperimentalna analiza pukotina u cijevi za vrijeme njene eksploatacije u većini slučajeva nije moguća ili je vrlo teško izvediva, uz visoki rizik i cijenu koštanja. Kao i kod većine drugih problema, numeričke simulacije sve više zamjenjuju mnogo skuplji eksperiment. Metoda konačnih elemenata, zajedno s metodom podmodeliranja, omogućuje detaljnu analizu raspodjele naprezanja na željenom mjestu u konstrukciji.

Na temelju rezultata za pomake čvorova globalnog modela te kreiranjem guste mreže podmodela, u radu je potrebno provesti numeričku analizu naprezanja i deformacija u debelostijenoj cijevi. Za diskretizaciju numeričkog modela primijeniti osnosimetrične, ljuskaste i trodimenzijske konačne elemente prvog, odnosno drugog reda. Analizu je potrebno ograničiti na linearno-elastično ponašanje materijala te male deformacije. Rezultate tih analiza potrebno je usporediti s pripadnim analitičkim. Promjenom gustoće mreže konačnih elemenata analizirati konvergenciju numeričkih rješenja. Detaljniji podaci potrebni za provedbu proračuna mogu se dobiti od mentora.

Osim toga, potrebno je modelirati hipotetsku osnu površinsku pukotinu u debelostijenoj cijevi te detaljnije analizirati koncentracije naprezanja. Numeričke analize provesti primjenom programskog paketa ABAQUS koji se temelji na metodi konačnih elemenata.

U radu treba navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

16. studenog 2012.

Zadatak zadan:

Prof. dr. sc. Zdenko Tonković

Rok predaje rada:

1. rok: 15. veljače 2013.

2. rok: 11. srpnja 2013.

3. rok: 13. rujna 2013.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 27., 28. veljače i 1. ožujka 2013.

2. rok: 15., 16. i 17. srpnja 2013.

3. rok: 18., 19. i 20. rujna 2013.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Igor Balen

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Ovom prilikom zahvalio bih se voditelju rada prof. dr. sc. Zdenku Tonkoviću te asistentu Ivici Skozritu, dr. sc., na uloženom trudu i nesebično pruženoj pomoći tijekom izrade ovog rada.

Filip Putar

Sadržaj

Sadržaj	I
Popis slika	III
Popis tablica	V
Popis oznaka	VI
Sažetak	VIII
1. Uvod	1
2. Analitičko rješenje	2
2.1. Općenito o debelostjenim cijevima [2]	2
2.2. Geometrija cijevi	4
3. Numerička analiza	7
3.1. Razmatranje konvergencije.....	7
3.1.1. Osnosimetrični konačni elementi [1]	7
3.1.1.1. Osnosimetrični element CAX4	9
3.1.1.2. Osnosimetrični element CAX6	12
3.1.2. Trodimenzijski konačni elementi [1]	15
3.1.2.1. Trodimenzijski element C3D8	18
3.1.2.2. Trodimenzijski element C3D20	21
3.1.3. Ljuskasti konačni elementi	24
3.1.3.1. Ljuskasti element S4	25
3.1.3.2. Ljuskasti element S8R	28
3.1.4. Zaključak	29
3.2. Podmodeliranje [4]	30
3.2.1. Čvorna tehnika podmodeliranja [7]	30
3.2.1.1. Shell-to-solid podmodeliranje	31
3.2.2. Geometrija pukotine.....	33
3.2.3. Globalni model	34
3.2.4. Geometrija podmodela.....	35
3.2.5. Podmodel bez pukotine	36
3.2.6. Singularni konačni elementi [3]	38
3.2.6.1. Singularni konačni elementi za opisivanje 2D problema	38
3.2.6.2. Singularni konačni elementi za opisivanje 3D problema	40
3.2.7. Podmodel s pukotinom	40
3.2.8. 3D model cijevi s pukotinom.....	42

3.2.9. Usporedba rezultata	46
4. Zaključak.....	49
Literatura	51

Popis slika

Slika 2.1. Poprečni presjek debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom [2]	2
Slika 2.2. Cijev opterećena unutarnjim tlakom	4
Slika 2.3. Raspodjela naprezanja po debljini cijevi	6
Slika 3.1. Općeniti osnosimetrični element [7]	8
Slika 3.2. Osnovni osnosimetrični pravokutni konačni element [7]	8
Slika 3.3. Osnosimetrični trokutni konačni element drugog reda [7]	9
Slika 3.4. Opterećenje i rubni uvjeti za model diskretiziran osnosimetričnim elementima	10
Slika 3.5. Mreže konačnih elemenata CAX4	10
Slika 3.6. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm ²), CAX4	11
Slika 3.7. Konvergencija cirkularnog naprezanja modela diskretiziranih CAX4 elementima	11
Slika 3.8. Mreže konačnih elemenata CAX6	12
Slika 3.9. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm ²), CAX6	13
Slika 3.10. Konvergencija cirkularnog naprezanja modela diskretiziranih CAX6 elementima	13
Slika 3.11. Konvergencija radijalnog pomaka osnosimetričnih konačnih elemenata	14
Slika 3.12. Osnovni prizmatični element s 24 stupnja slobode [7]	15
Slika 3.13. Prizmatični serendipity element drugog reda [7]	16
Slika 3.14. Opterećenje i rubni uvjeti za model diskretiziran trodimenzijskim konačnim elementima	18
Slika 3.15. Mreže konačnih elemenata C3D8	19
Slika 3.16. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm ²), C3D8	20
Slika 3.17. Konvergencija cirkularnog naprezanja modela diskretiziranih C3D8 elementima	20
Slika 3.18. Kvalitativna usporedba diskretizacije	21
Slika 3.19. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm ²), C3D20	22
Slika 3.20. Konvergencija cirkularnog naprezanja modela diskretiziranih C3D20 elementima	22
Slika 3.21. Konvergencija radijalnog pomaka trodimenzijskih konačnih elemenata	23
Slika 3.22. Ljuskasti element S4 [7]	24
Slika 3.23. Ljuskasti element S8R [7]	24
Slika 3.24. Mreže konačnih elemenata S4	25
Slika 3.25. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm ²), S4	26
Slika 3.26. Konvergencija radijalnog pomaka i cirkularnog naprezanja ljuskastih elemenata S4	27
Slika 3.27. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm ²), S8R	28
Slika 3.28. Konvergencija radijalnog pomaka i cirkularnog naprezanja ljuskastih elemenata S8R	29
Slika 3.29. Globalni model [7]	30
Slika 3.30. Uvećani prikaz podmodela i pogonjenih čvorova [7]	31
Slika 3.31. Globalni model i podmodel kod shell-to-solid podmodeliranja [7]	31

Slika 3.32. Vanjska tolerancija kod shell-to-solid podmodeliranja [7]	32
Slika 3.33. Centralna zona [7]	33
Slika 3.34. Cijev s unutarnjom aksijalnom polueliptičnom pukotinom opterećena unutarnjim tlakom p	33
Slika 3.35. Rubni uvjeti globalnog modela	34
Slika 3.36. Mreža globalnog modela	35
Slika 3.37. Geometrija podmodela: a) 3D model, b) dvostruka duljina podmodela	36
Slika 3.38. Podmodel bez pukotine prikazan u spoju s globalnim modelom.....	36
Slika 3.39. Shematski prikaz lokalnog savijanja i raspodjele tlaka po deformiranoj konfiguraciji	37
Slika 3.40. Lokalno savijanje podmodela	37
Slika 3.41. Kolabiranje konačnog elementa kod 2D problema [7]	38
Slika 3.42. Preslikavanje kvadratnog 8-čvornog elementa u trokutasti izoparametarski element [3]	39
Slika 3.43. Kolabiranje konačnog elementa kod 3D problema [7]	40
Slika 3.44. Mreža podmodela s pukotinom	41
Slika 3.45. Rubni uvjeti podmodela s pukotinom	41
Slika 3.46. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm ²) na podmodelu s pukotinom.....	42
Slika 3.47. Mreža 3D modela cijevi s pukotinom	43
Slika 3.48. Rubni uvjeti 3D modela cijevi s pukotinom	43
Slika 3.49. Detalj oko vrha pukotine deformiranog 3D modela cijevi s prikazom ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm ²)	44
Slika 3.50. Deformirana polovica 3D modela cijevi.....	45
Slika 3.51. Raspodjela radijalnog pomaka vanjske stjenke cijevi po duljini	46
Slika 3.52. Raspodjela radijalnog pomaka vanjske stjenke cijevi po opsegu	47
Slika 3.53. Raspodjela cirkularnog naprezanja vanjske stjenke cijevi po duljini	47
Slika 3.54. Raspodjela cirkularnog naprezanja vanjske stjenke cijevi po opsegu	48

Popis tablica

Tablica 3.1. Relativne greške vrijednosti radijalnih pomaka i cirkularnih naprezanja ljuskastog S4 elementa u odnosu na analitičko rješenje za srednju ravninu debele cijevi 27

Popis oznaka

a	mm	dubina pukotine
a_i	-	koeficijenti u interpolacijskim polinomima
\mathbf{B}	-	matrica ovisnosti deformacije u elementu o pomacima u čvorovima
c	mm	duljina pukotine
\mathbf{D}	-	matrica elastičnosti
E	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Youngov modul elastičnosti
F	N	opterećenje
\mathbf{J}	-	Jacobijeva matrica
\mathbf{K}	-	globalna matrica krutosti
L	mm	duljina
K	$\frac{\text{N}\sqrt{\text{mm}}}{\text{mm}^2}$	faktor intenzivnosti naprezanja
\mathbf{N}	-	matrica funkcija oblika
\mathbf{N}_i	-	matrica funkcija oblika za i -ti čvor
p	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	tlak
R_i, R_m, R_o	mm	unutarnji, srednji, vanjski radijus cijevi
r	mm	tekući radijus cijevi, udaljenost od vrha pukotine
r, φ, z	mm, rad	cilindrične koordinate
s	mm	duljina podmodela
t	mm	debljina stijenke cijevi
\mathbf{u}	mm	vektor pomaka
u_r, w	mm	komponente pomaka u cilindričnom koordinatnom sustavu
u_{ri}, w_i	mm	komponente pomaka i -tog čvora konačnog elementa u cilindričnom koordinatnom sustavu
u_1, u_2, u_3	mm	pomaci u Kartezijevom koordinatnom sustavu u programskom paketu ABAQUS [6]
ur_1, ur_2, ur_3	rad	kutovi zakreta u Kartezijevom koordinatnom sustavu u

		programskom paketu ABAQUS [6]
u, v, w	mm	komponente pomaka u Kartezijevom koordinatnom sustavu
u_i, v_i, w_i	mm	komponente pomaka i -tog čvora konačnog elementa u Kartezijevom koordinatnom sustavu
\mathbf{v}	-	vektor stupnjeva slobode konačnog elementa
\mathbf{v}_i		vektor stupnjeva slobode i -tog čvora elementa
x, y, z	mm	Kartezijeve koordinate
α	-	pomak tečenja
δ	mm	debljina debelostjene cijevi
ε	-	deformacija
ν	-	Poissonov koeficijent
ξ, η, ζ	-	bezdimenzijske prirodne koordinate
ξ_i, η_i, ζ_i	-	prirodne koordinate i -tog čvora konačnog elementa
$\sigma_{\text{ekv, HMH}}$	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	ekvivalentno naprezanje prema energetske teoriji čvrstoće
$\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	komponente naprezanja u cilindričnom koordinatnom sustavu
$\varphi_{ix}, \varphi_{iy}, \varphi_{iz}$	rad	komponente kutova zakreta i -tog čvora konačnog elementa u Kartezijevom koordinatnom sustavu

Sažetak

Tema ovog završnog rada je numeričko modeliranje osne pukotine u debelostjenoj cijevi. Prije same numeričke analize, koja je vršena metodom konačnih elemenata u programskom paketu ABAQUS/STANDARD, dan je kratak osvrt o debelostjenim cijevima te napravljeno analitičko rješenje zadane debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom na kojoj će se temeljiti ostatak rada. Numerička analiza je, sukladno stečenom znanju, ograničena na linearno-elastično ponašanje materijala te male deformacije. Započeta je ispitivanjem konvergencije rješenja spomenute debele cijevi promatranjem cirkularnih naprezanja i radijalnih pomaka za četiri različite gustoće mreže. U analizi su upotrijebljeni osnosimetrični, trodimenzijski i ljuskasti elementi prvog, odnosno drugog reda, a prije svake analize za svaku grupu elemenata dani su i kratki opisi istih. Nastavak je okrenut podmodeliranju, tehnici veoma važnoj u analizi pukotina. Kako je u ovom radu korištena *shell-to-solid* tehnika podmodeliranja, detaljnije su izneseni njeni osnovni principi. Izvršena je analiza s podmodelom bez pukotine kako bi se prikazala i pojasnila pojava lokalnog savijanja na rubu podmodela, te analiza s podmodelom s unutarnjom osnom polueliptičkom pukotinom. Pri diskretizaciji podmodela s pukotinom korišteni su singularni konačni elementi koji su prethodno ukratko i opisani. Rezultati dvaju podmodela uspoređeni su pri kraju s rezultatima cijevi diskretizirane u potpunosti trodimenzijskim elementima, koja kao takva predstavlja referentno rješenje.

1. Uvod

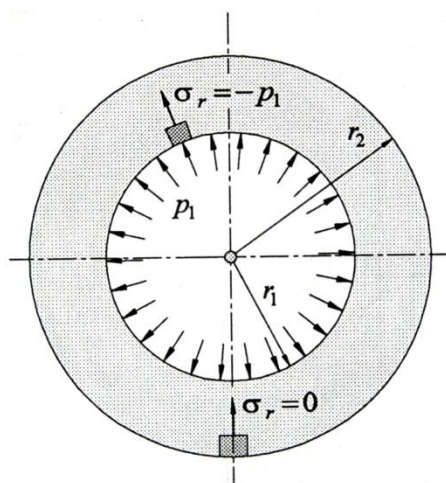
Iz teorije je poznato kako bi proglašivanjem mreže konačnih elemenata numeričko rješenje trebalo konvergirati prema točnom rješenju. Konformni elementi pritom konvergiraju monotono, dok s druge strane to nije slučaj s nekonformnim elementima [1]. Upravo je cilj prvog djela završnog rada bio ispitati konvergenciju nekih tipičnih konačnih elemenata na primjeru zadane debelostjene cijevi.

Debelostjene cijevi koje se koriste primjerice pri transportu zemnog plina neprestano se nalaze pod tlakom, te je pojava oštećenja, a samim time i pukotina neizbježna ukoliko se uz radno opterećenje pridoda niz degradacijskih mehanizama koji mogu biti posljedica procesa izrade, korozivnih procesa ili sprega više njih zajedno. Zbog neprikladnosti eksperimentalne analize pukotine u cijevi za vrijeme njene eksploatacije, u današnje vrijeme sve više dolazi do izražaja dolazi numerička simulacija pomoću koje se mnogo lakše i jeftinije dolazi do traženih veličina. Pukotina predstavlja mjesto geometrijskog diskontinuiteta te je za očekivati kako će ona u cijevi djelovati kao koncentrator naprezanja što uvijek djeluje izrazito nepovoljno na mehanički integritet same konstrukcije. Primjenom tehnike podmodeliranja na temelju koje se pomacima relativno rijetko diskretiziranog globalnog modela upravlja podmodelom gusto kreirane mreže, omogućuje se detaljnija analiza područja interesa u konstrukciji, u ovom slučaju analiza raspodjele naprezanja oko pukotine. Uz mogućnost dobivanja rezultata analize veoma bliskih realnosti, prednost tehnike podmodeliranja je što simulaciju čini računalno manje zahtjevnijom. Međutim, kao što će se kasnije pokazati, rezultati simulacije provedene tim principom ne moraju nužno biti blizu stvarnih rješenja, ali zato barem daju približan uvid u stvarno stanje koje se javlja u interesnom području.

2. Analitičko rješenje

2.1. Općenito o debelostjenim cijevima [2]

Debelostjene cijevi su simetrična tijela poprečnog presjeka u obliku kružnog vijenca, koja su osnosimetrično učvršćena i opterećena i kod kojih opterećenje ne ovisi o uzdužnoj koordinati koja je paralelna s osi tijela. Na slici 2.1. prikazan je poprečni presjek debelostjene cijevi opterećene unutarnjim tlakom.



Slika 2.1. Poprečni presjek debele cijevi opterećene unutarnjim tlakom [2]

Kriterij koji mora biti zadovoljen kako bi neka cijev bila debelostjena jest:

$$\delta \geq \frac{1}{10} \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad (2.1)$$

gdje δ predstavlja debljinu debelostjene cijevi.

Geometrijska analiza pomaka i deformacija provedena je uz sljedeće pretpostavke o deformiranju i raspodjeli naprezanja [2]:

- Vrijedi Hookeov zakon, a to znači da su sva naprezanja manja od granice tečenja materijala σ_T (linearno elastično područje).
- Cijev je osnosimetrična, osnosimetrično učvršćena i opterećena. Posljedica toga je da sve geometrijske i statičke veličine neće ovisiti o koordinatama φ i z , već će biti funkcija samo jedne varijable – tekućeg radijusa r .

- U stjenci debele cijevi vlada troosno stanje naprezanja. Pojavljuju se naprezanja σ_r (radijalno naprezanje), σ_ϕ (cirkularno naprezanje) i σ_z (aksijalno naprezanje).
- Aksijalno naprezanje σ_z jednoliko je raspodijeljeno po debljini stjenke cijevi.
- Izvedene relacije vrijede za presjeke dovoljno udaljene od krajeva cijevi, tj. ne razmatraju se naprezanja i pomaci u prijelaznom području gdje se javlja lokalno savijanje. Cijev se promatra kao dugački cilindar duljine najmanje 5 puta veće od promjera.
- Cijev je podvrgnuta samo radijalnom opterećenju.

Naprezanja se izračunavaju preko sljedećih izraza koji su izvedeni u [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[1 - \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_\phi &= \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[1 + \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_z &= \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Kako gornji izrazi predstavljaju glavna naprezanja u debelostjenim cijevima, prema energetske teoriji (HMH teorija) čvrstoće ekvivalentno naprezanje je:

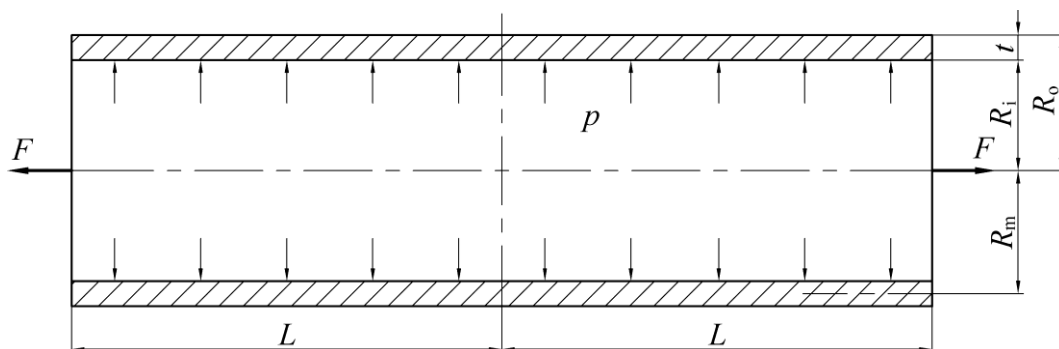
$$\sigma_{\text{ekv, HMH}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_\phi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\phi)^2}.\tag{2.3}$$

Izraz za radijalni pomak u glasi:

$$u = \frac{p_1 r_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[(1 - \nu)r + (1 + \nu)\frac{r_2^2}{r} \right] - \frac{\nu}{E} \sigma_z r.\tag{2.4}$$

2.2. Geometrija cijevi

Geometrija cijevi analizirana u ovom radu, kakva se koristi za transport zemnog plina prikazana je na slici 2.2.



Slika 2.2. Cijev opterećena unutarnjim tlakom

R_i , R_m i R_o su unutarnji, srednji i vanjski radijus cijevi, dok je t debljina stijenke cijevi. Kao što je vidljivo sa slike, unutarnji tlak p jednoliko je raspodijeljen po unutarnjoj površini cijevi, a aksijalnom silom F simulirano je opterećenje zatvorene cijevi.

Zadane dimenzije cijevi su:

$$\begin{aligned} R_i &= 25,7 \text{ mm}, \\ R_m &= 28,6 \text{ mm}, \\ R_o &= 31,5 \text{ mm}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

iz čega proizlazi da je debljina stijenke cijevi:

$$t = 5,8 \text{ mm}. \quad (2.6)$$

Uz pretpostavke o linearno-elastičnom ponašanju materijala u radu su uzete sljedeće vrijednosti za modul elastičnosti E i Poissonov faktor ν :

$$\begin{aligned} E &= 100 \text{ MPa} \quad \text{i} \\ \nu &= 0,4, \end{aligned} \quad (2.7)$$

dok je opterećenje cijevi jednako:

$$p = 1 \text{ MPa}. \quad (2.8)$$

Uvrštavanjem izraza (2.5) u (2.1) lako je ustanoviti kako razmatrana cijev pripada skupini debelostjenih cijevi te se gornji izrazi za naprezanja i pomake mogu koristiti u daljnjem

proračunu. Ukoliko se izrazi (2.5) i (2.7) uvrste u izraze (2.2), (2.3) i (2.4) dobivaju se naprezanja i radijalni pomaci redom na unutarnjem, srednjem i vanjskom radijusu kako slijedi:

$$r = R_i :$$

$$\begin{aligned}\sigma_r(R_i) &= -p = -1 \text{ MPa}, \\ \sigma_\varphi(R_i) &= 4,982 \text{ MPa}, \\ \sigma_z(R_i) &= 1,991 \text{ MPa}, \\ \sigma_{\text{ekv, HMH}}(R_i) &= 5,181 \text{ MPa}, \\ u(R_i) &= 1,17844 \text{ mm},\end{aligned}\tag{2.9}$$

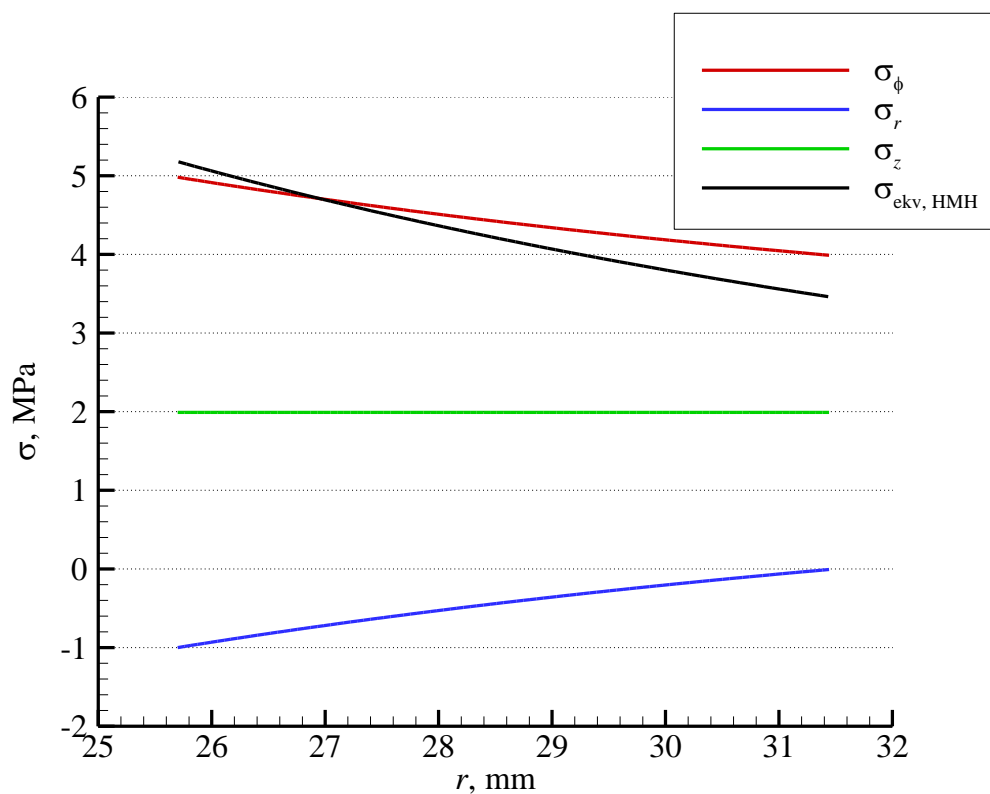
$$r = R_m :$$

$$\begin{aligned}\sigma_r(R_m) &= -0,4242 \text{ MPa}, \\ \sigma_\varphi(R_m) &= 4,406 \text{ MPa}, \\ \sigma_z(R_m) &= 1,991 \text{ MPa}, \\ \sigma_{\text{ekv, HMH}}(R_i) &= 4,183 \text{ MPa}, \\ u(R_m) &= 1,08088 \text{ mm},\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$r = R_o :$$

$$\begin{aligned}\sigma_r(R_o) &= 0 \text{ MPa}, \\ \sigma_\varphi(R_o) &= 3,982 \text{ MPa}, \\ \sigma_z(R_o) &= 1,991 \text{ MPa}, \\ \sigma_{\text{ekv, HMH}}(R_i) &= 3,449 \text{ MPa}, \\ u(R_o) &= 1,003397 \text{ mm}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Dijagram raspodjele naprezanja po debljini stjenke prikazan je u nastavku, na slici 2.3.



Slika 2.3. Raspodjela naprezanja po debljini cijevi

Kao što se može uočiti sa slike, aksijalno naprezanje σ_z konstantno je po debljini debelostjene cijevi što potvrđuje ranije iznesenu pretpostavku, te predstavlja os simetrije za naprezanja σ_r i σ_ϕ .

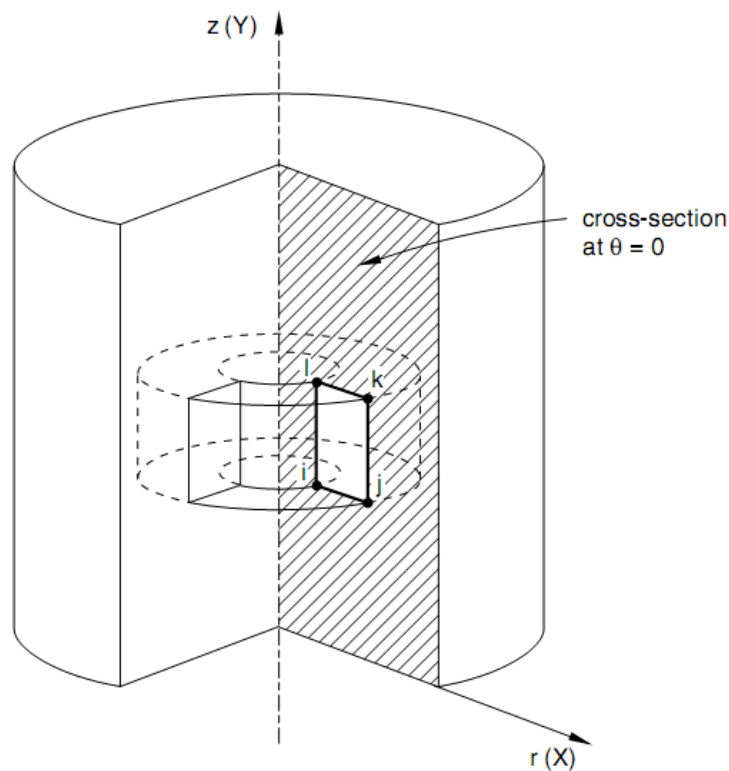
3. Numerička analiza

3.1. Razmatranje konvergencije

U nastavku će se primjenom programskog paketa za analizu metodom konačnih elemenata ABAQUS/STANDARD modelirati cijev zadanih dimenzija i opterećenja prikazanu na slici Slika 2.2 2.2., te na temelju izračunatih naprezanja i pomaka razmatrati konvergencija numeričkog rješenja prema analitičkom rješenju za četiri različite gustoće mreže. Primijenit će se osnosimetrični (CAX4 i CAX6), trodimenzijski (C3D8 i C3D20) i ljuskasti (S4 i S8R) konačni elementi prvog, odnosno drugog reda. Prije samog modeliranja i razmatranja konvergencije za svaku od tri navedene skupine elemenata, dan je kratak opis istih.

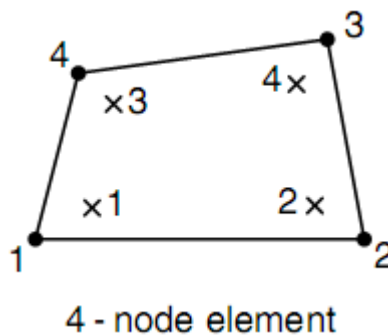
3.1.1. Osnosimetrični konačni elementi [1]

Osnosimetrični konačni elementi rabe se za rješavanje problema osnosimetrične deformacije osnosimetričnih tijela. Imaju oblik kružnog prstena čiji poprečni presjek može biti u obliku trokuta, pravokutnika ili proizvoljnog četverokuta, baš kao i kod dvodimenzijskih problema. Međutim, za razliku od dvodimenzijskih problema gdje govorimo o čvornim točkama, kod osnosimetričnih konačnih elemenata one prelaze u čvorne kružnice. Još jedna bitna razlika koju valja napomenuti jest postojanje treće komponente glavnih naprezanja (cirkularne komponente σ_{φ}) koja, za razliku od dvodimenzijskih elemenata koji se koriste pri analizi ravninskog stanja naprezanja i deformacije, utječe na energiju deformiranja te tako ulazi u razmatranje za analizu naprezanja i deformacija. Prikaz općenitog prstenastog konačnog elementa te njegovog poprečnog presjeka dan je na slici 3.1.



Slika 3.1. Općeniti osnosimetrični element [7]

CAX4 predstavlja osnovni prstenasti pravokutni element sa čvornim kružnicama u vrhovima pravokutnika. Poprečni presjek takvog elementa prikazan je na slici 3.2.



Slika 3.2. Osnovni osnosimetrični pravokutni konačni element [7]

Vektor pomaka sadrži radijalnu i osnu komponentu:

$$\mathbf{u}^T = [u_r \quad w], \quad (3.1)$$

a njihova raspodjela opisana je bilinearnim funkcijama na isti način kao i za osnovni pravokutni element:

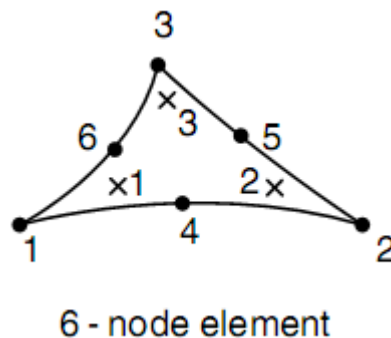
$$\begin{aligned} u_r &= a_1 + a_2 r + a_3 z + a_4 r z, \\ w &= a_5 + a_6 r + a_7 z + a_8 r z. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Vektor stupnjeva slobode jednak je:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^T &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4], \\ \mathbf{v}_i^T &= [u_{ri} \quad w_i], \quad i=1,2,3,4,\end{aligned}\tag{3.3}$$

gdje vektor \mathbf{v}_i predstavlja broj stupnjeva slobode u i -tom čvoru.

CAX6 osnosimetrični trokutni konačni element drugog reda prikazan je na slici 3.3.



Slika 3.3. Osnosimetrični trokutni konačni element drugog reda [7]

Kao što se vidi sa slike, takav se konačni element sastoji od 6 čvorova i 12 stupnjeva slobode. Raspodjela pomaka opisana je potpunim polinomom drugog stupnja:

$$\begin{aligned}u_r &= a_1 + a_2 r + a_3 z + a_4 r^2 + a_5 r z + a_6 z^2, \\ w &= a_7 + a_8 r + a_9 z + a_{10} r^2 + a_{11} r z + a_{12} z^2,\end{aligned}\tag{3.4}$$

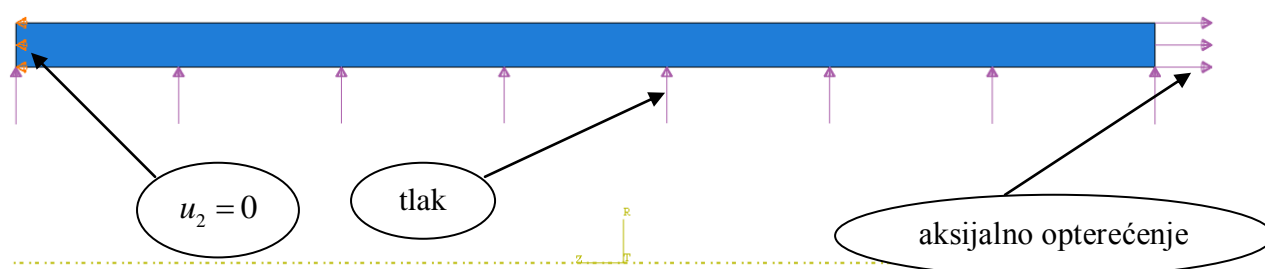
dok je vektor stupnjeva slobode jednak:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^T &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4 \quad \mathbf{v}_5 \quad \mathbf{v}_6], \\ \mathbf{v}_i^T &= [u_{ri} \quad w_i], \quad i=1,2,3,4,5,6.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Slijedi modeliranje u programskom paketu ABAQUS te vršenje analize i usporedba rezultata. Prvo će se razmotriti konvergencija za model sa četiri različite gustoće mreže i korištenjem CAX4, a potom i korištenjem CAX6 konačnih elemenata. Isti postupak će se nakon toga provoditi i za preostale elemente.

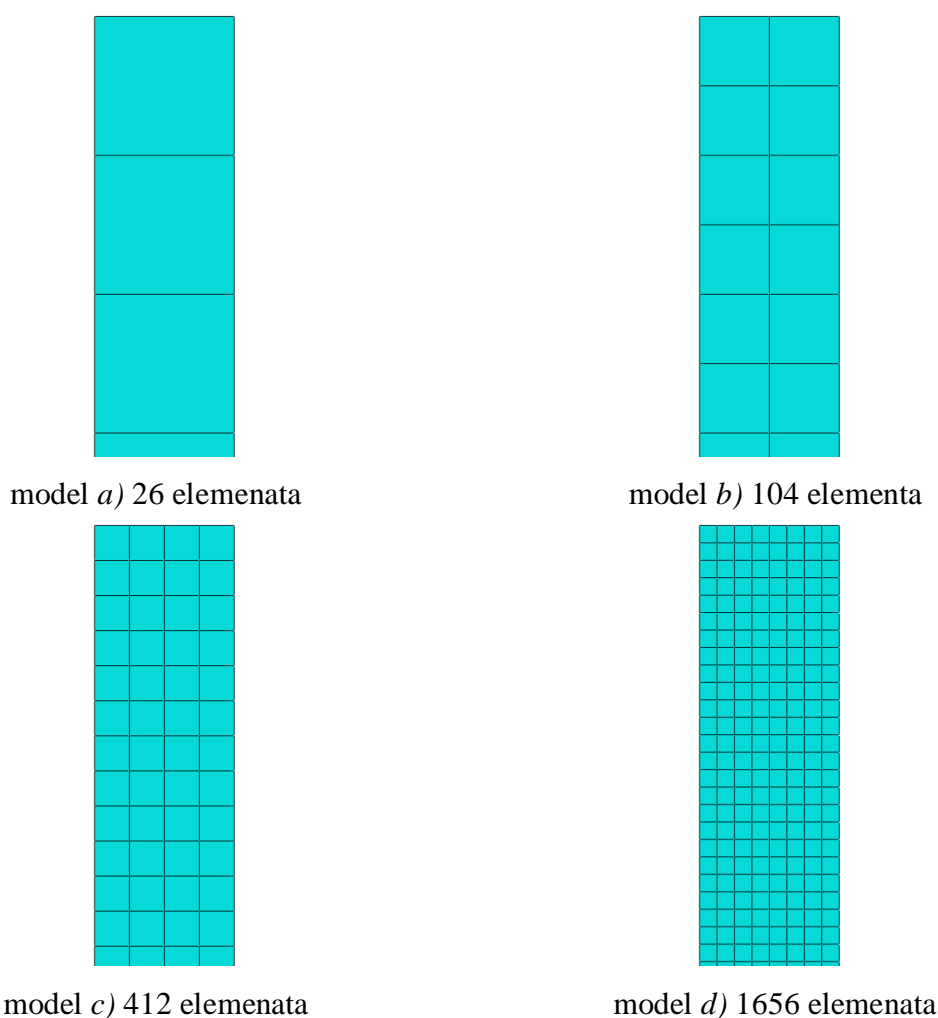
3.1.1.1. Osnosimetrični element CAX4

Kako se slika poprečnog presjeka ponavlja duž cirkularne koordinate cijevi, prikazuje se samo jedna takva ravnina. Također, zbog simetrije se u razmatranje može uzeti samo polovica cijevi duljine L . Opterećenje i rubni uvjeti dodijeljeni na cijev prikazuje slika 3.4.



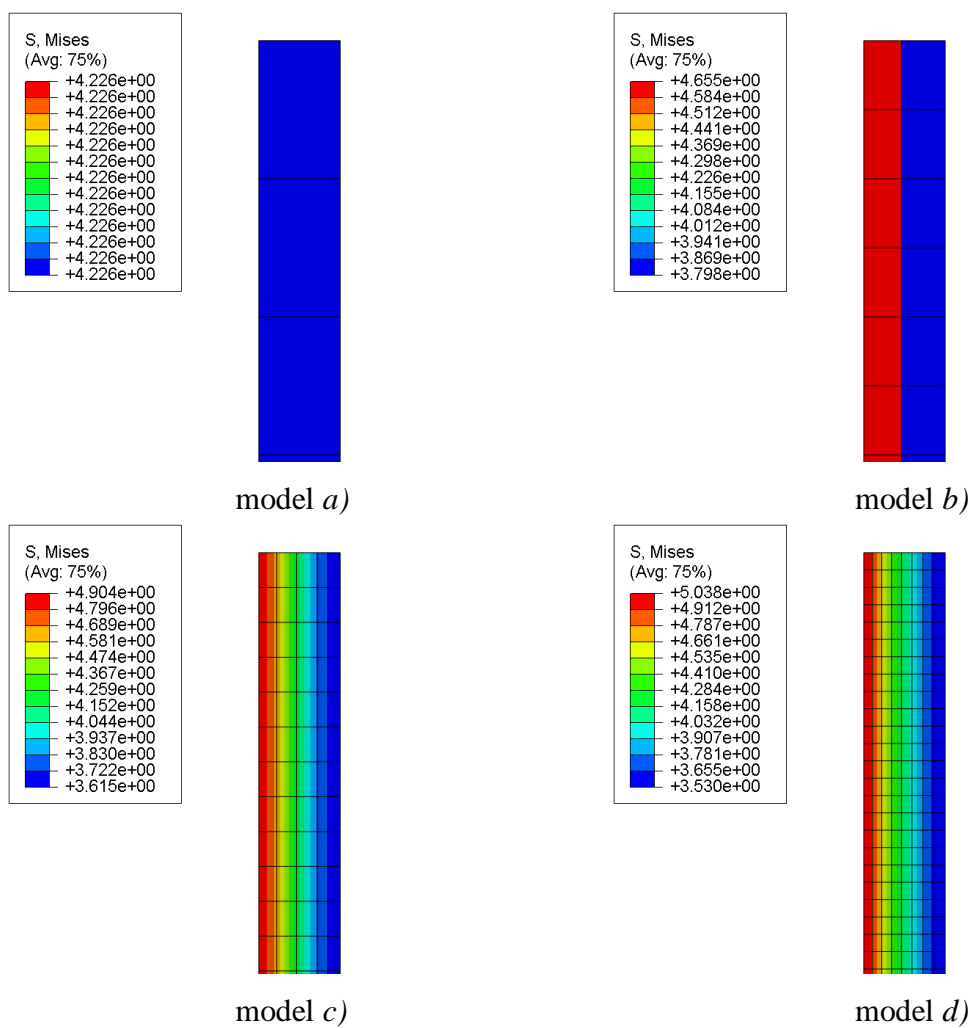
Slika 3.4. Opterećenje i rubni uvjeti za model diskretiziran osnosimetričnim elementima

Četiri različito diskretizirana modela dana su na slici 3.5. Prikazani su detalji mreže oko vrha na kojem je primijenjen uvjet simetrije $u_2 = 0$, odakle će se u daljnjem tekstu očitavati sve potrebne veličine, odnosno radijalni pomaci i cirkularna naprezanja.

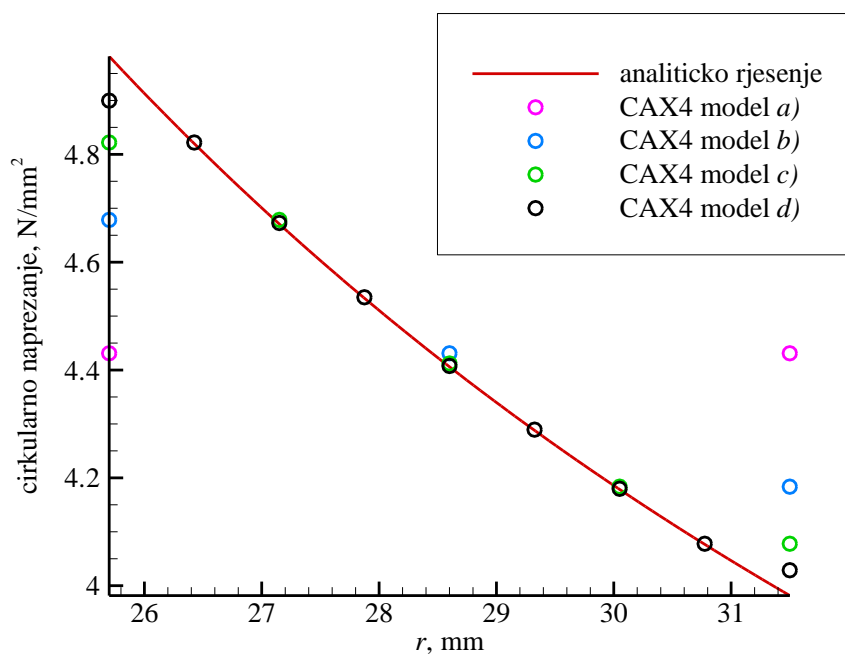


Slika 3.5. Mreže konačnih elemenata CAX4

Deformirani oblici s prikazom ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu prikazani su u nastavku, slika 3.6. Na slici 3.7. prikazana je usporedba cirkularnog naprezanja po debljini cijevi dobivenog analitičkim putem sa cirkularnim naprezanjem u čvorovima za četiri različite diskretizacije kao što to prikazuje slika 3.5.



Slika 3.6. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm²), CAX4

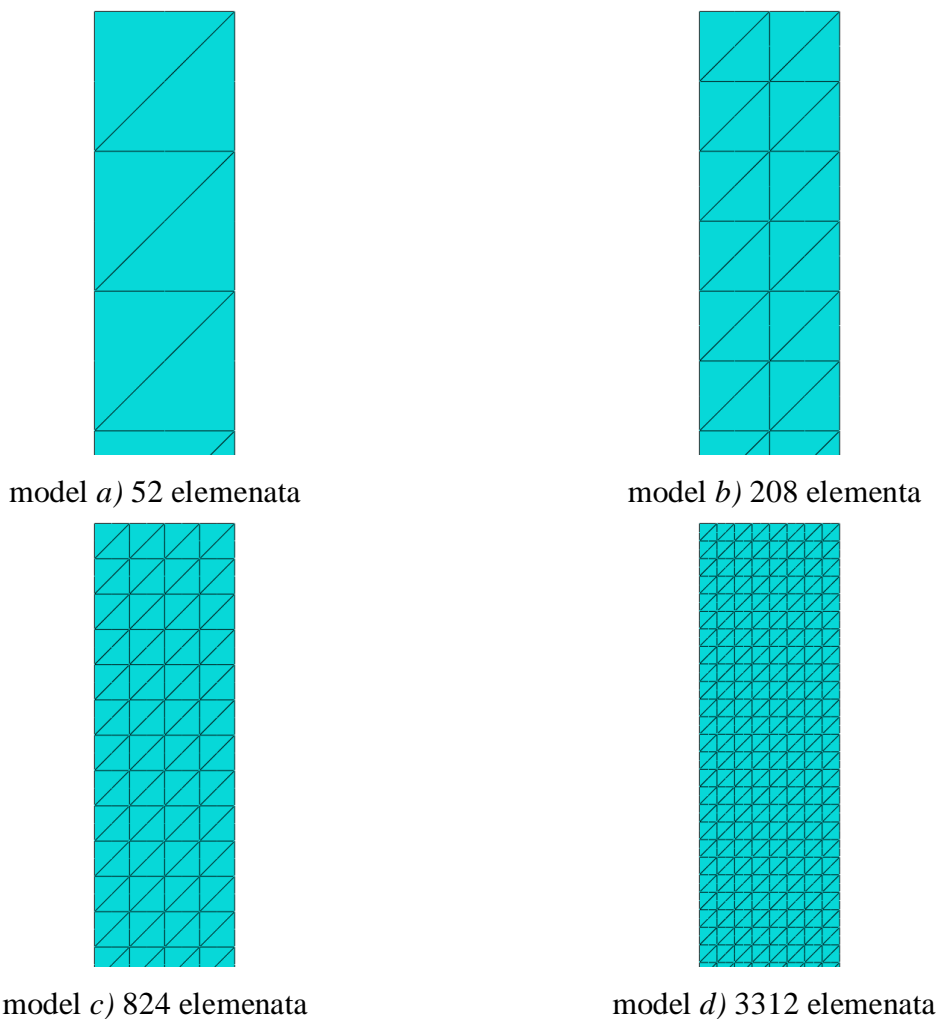


Slika 3.7. Konvergencija cirkularnog naprezanja modela diskretiziranih CAX4 elementima

Na gornjem se dijagramu sa slike 3.7. lako može uočiti kako povećanjem broja stupnjeva slobode cirkularna naprezanja monotono konvergiraju prema analitičkom rješenju.

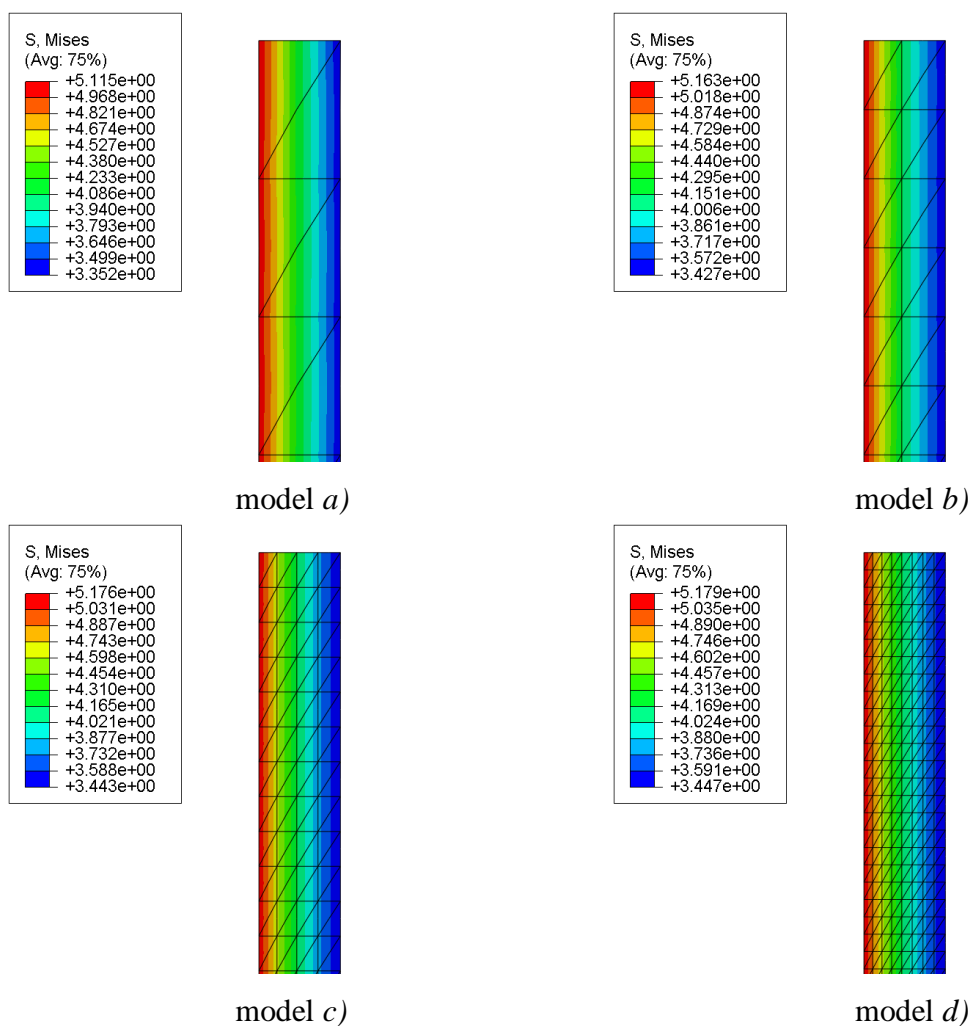
3.1.1.2. Osnosimetrični element CAX6

Mreže konačnih elemenata bi za ovaj tip konačnog elementa izgledale kao što to prikazuje slika 3.8.

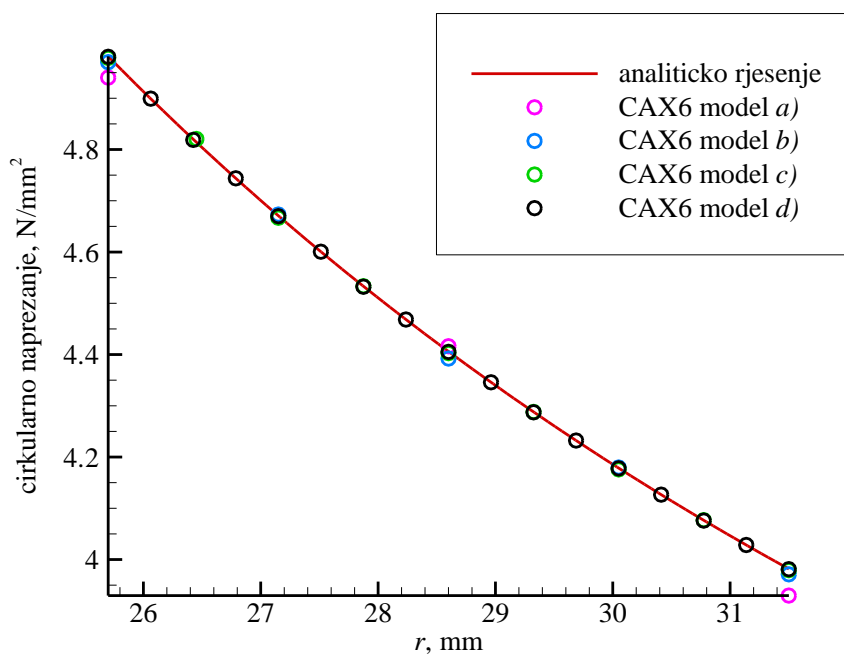


Slika 3.8. Mreže konačnih elemenata CAX6

Odgovarajući deformirani oblici cijevi s prikazom ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu dani su na slici 3.9. U nastavku je dana i usporedba cirkularnog naprezanja po debljini cijevi dobivenog analitičkim putem sa cirkularnim naprezanjem u čvorovima, slika 3.10.



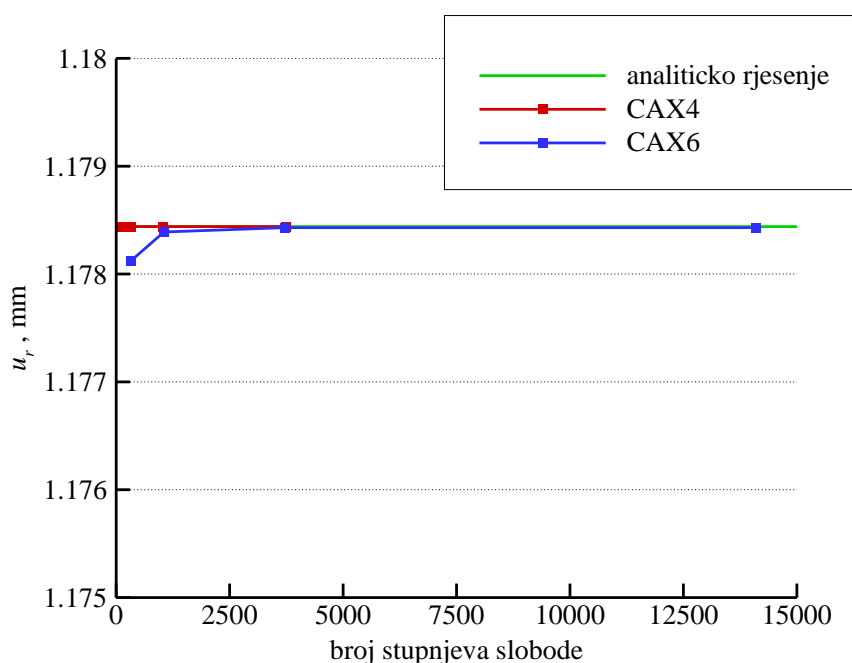
Slika 3.9. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm²), CAX6



Slika 3.10. Konvergencija cirkularnog naprezanja modela diskretiziranih CAX6 elementima

Iz prethodnog dijagrama sa slike 3.10. može se zaključiti kako se već primjenom najrjeđe mreže osnosimetričnih konačnih elemenata drugog reda u ovom slučaju mogu dobiti iznosi cirkularnog naprezanja u čvorovima veoma blizu analitičkom rješenju. Također, vidi se da se proglašćivanjem mreže dobivaju sve točniji rezultati, koji su za najgušću mrežu gotovo i jednaki analitičkom rješenju.

Konvergencija će se za oba tipa navedenih osnosimetričnih konačnih elemenata, dakle CAX4 i CAX6, ispitati i na sljedećim dijagramu, slika 3.11., koji prikazuje radijalne pomake unutarnje stjenke cijevi za različiti broj stupnjeva slobode prema modelima redom na slici 3.5. i slici 3.8.



Slika 3.11. Konvergencija radijalnog pomaka osnosimetričnih konačnih elemenata

Iz gornjeg se dijagrama vidi kako CAX6 elementi očigledno konvergiraju monotono, međutim za element CAX4 sve četiri gustoće mreže daju pomake unutarnje stjenke cijevi jednake analitičkom rješenju. Elementi višeg reda obično brže konvergiraju od istih elemenata nižeg reda, no kako je usporedba na gornjem grafu vršena između trokutnih i pravokutnih elemenata može se zaključiti kako su za razmatrani problem pravokutni elementi mnogo pogodniji.

Uspoređujući konvergenciju radijalnog pomaka prikazanu slikom 3.11. s konvergencijom cirkularnog naprezanja sa slike 3.7., uočava se kako točnost polja pomaka ne uvjetuje nužno i

točnost polja naprezanja, a razlog tome je što ABAQUS/STANDARD ne izračunava naprezanja direktno prema izrazu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{v}, \quad (3.6)$$

gdje su:

$\boldsymbol{\sigma}$ - vektor naprezanja,

\mathbf{D} - matrica elastičnosti,

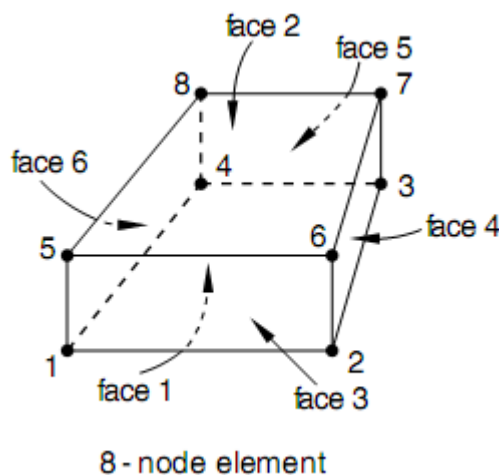
\mathbf{B} - matrica derivacija funkcija oblika,

već ih ekstrapolira iz integracijskih točaka kojih je u CAX4 tipu elementa četiri, kao što to prikazuje slika 3.2.

Iz svega dosad navedenog može se zaključiti kako osnosimetrični konačni elementi tipa CAX4 i CAX6 pripadaju skupini konformnih elemenata, odnosno pokazuju odlike monotone konvergencije. Dakle, u mogućnosti su opisivati pomake krutog tijela, omogućeno je da opisuju polje konstantne deformacije te su zadovoljeni uvjeti kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata.

3.1.2. Trodimenzijski konačni elementi [1]

Najčešće primjenjivani prizmatični konačni element oblika je heksaedra s osam čvorova s po tri stupnja slobode. Stupnjevi slobode komponente su pomaka u Kartezijevom koordinatnom sustavu, čije se ishodište najčešće postavlja u težište elementa. Upravo C3D8 predstavlja takav tip elementa, a prikazan je na slici 3.12.



Slika 3.12. Osnovni prizmatični element s 24 stupnja slobode [7]

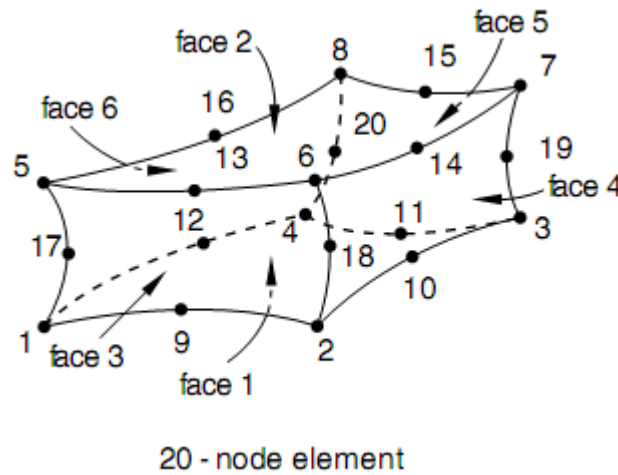
Komponente pomaka opisane su sljedećim nepotpunim polinomom trećeg stupnja:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz, \\ v &= a_1 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}xy + a_{14}yz + a_{15}zx + a_{16}xyz, \\ w &= a_{17} + a_{18}x + a_{19}y + a_{20}z + a_{21}xy + a_{22}yz + a_{23}zx + a_{24}xyz. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Vektor stupnjeva slobode glasi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4 \quad \mathbf{v}_5 \quad \mathbf{v}_6 \quad \mathbf{v}_7 \quad \mathbf{v}_8], \\ \mathbf{v}_i^T &= [u_i \quad v_i \quad w_i], \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8. \end{aligned} \quad (3.8)$$

C3D20 je prizmatični serendipity konačni element drugog reda, tj. ima 20 čvorova s ukupno 60 stupnjeva slobode, što se vidi na slici 3.13.



Slika 3.13. Prizmatični serendipity element drugog reda [7]

Funkcija pomaka može se za ovaj slučaj u općem obliku zapisati kao polinom četvrtog reda:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz + \\ &+ a_9x^2 + a_{10}y^2 + a_{11}z^2 + a_{12}x^2y + a_{13}x^2z + a_{14}y^2x + \\ &+ a_{15}y^2z + a_{16}z^2x + a_{17}z^2y + a_{18}x^2yz + a_{19}xy^2z + a_{20}xyz^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Također će se prikazati funkcije oblika izvedene u prirodnim koordinatama ξ , η i ζ čije se ishodište nalazi u težištu elementa.

Funkcije oblika koje se odnose na čvorove heksaedra jednake su:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i + 2), \quad (3.10)$$

gdje su ξ_i , η_i i ζ_i koordinate čvorova koje poprimaju vrijednosti ± 1 . Za čvorove po sredini bridova elementa koji imaju koordinate $\xi_i = 0$, $\eta_i = \pm 1$, $\zeta_i = \pm 1$ funkcije oblika su:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i), \quad (3.11)$$

dok su izrazi za čvorove s koordinatama $\eta_i = 0$, $\xi_i = \pm 1$, $\zeta_i = \pm 1$ jednaki:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i). \quad (3.12)$$

Analogno, za preostale čvorove s koordinatama $\zeta_i = 0$, $\xi_i = \pm 1$, $\eta_i = \pm 1$ vrijedi relacija:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i). \quad (3.13)$$

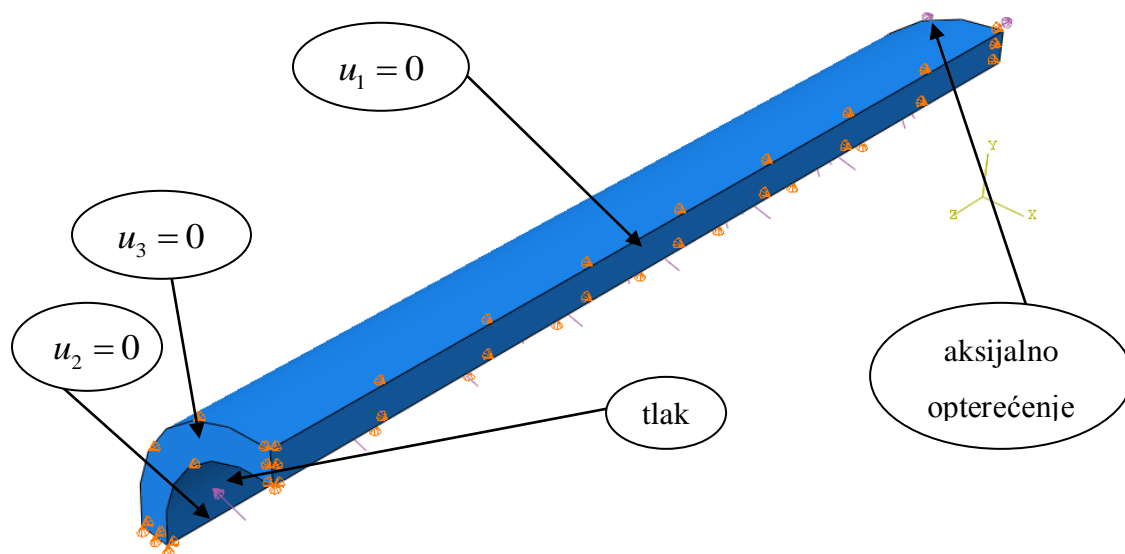
Navedeni konačni element ima tri stupnja slobode gibanja po svakom od čvorova, pa je vektor stupnjeva slobode jednak:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{20}], \\ \mathbf{v}_i^T &= [u_i \quad v_i \quad w_i], \quad i = 1, 2, 3, \dots, 20. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1.2.1. Trodimenzijski element C3D8

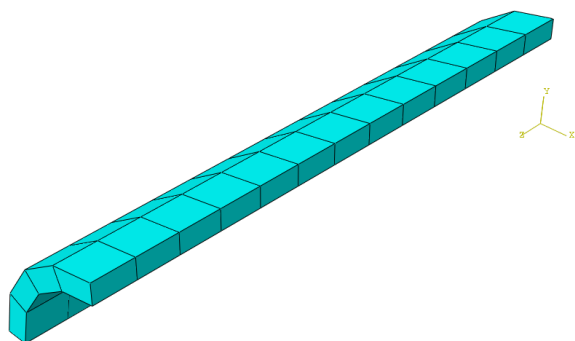
Modelirat će se samo osmina cijevi zbog trostruke simetrije, što nam donosi velike pogodnosti u smislu smanjenja potrebne računalne memorije.

Rubni uvjeti i opterećenje za osminu cijevi prikazani su na slici 3.14. Pomaci i naprezanja će se ovaj put očitavati s ruba koji se nalazi na spoju presjeka za koje vrijede rubni uvjeti $u_1 = 0$ i $u_3 = 0$.

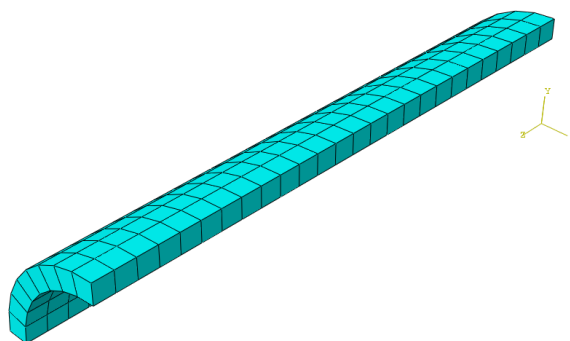


Slika 3.14. Opterećenje i rubni uvjeti za model diskretiziran trodimenzijskim konačnim elementima

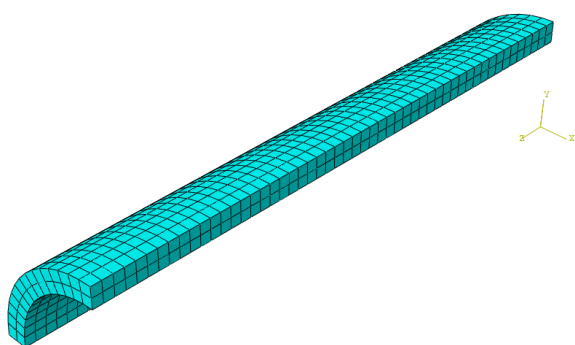
Četiri različite gustoće mreže dane su na donjoj slici, slika 3.15.



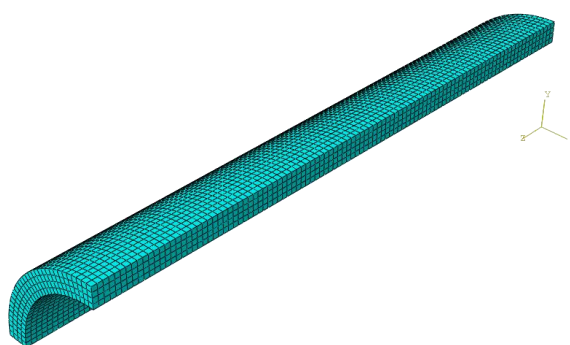
model a) 52 elemenata



model b) 208 elementa



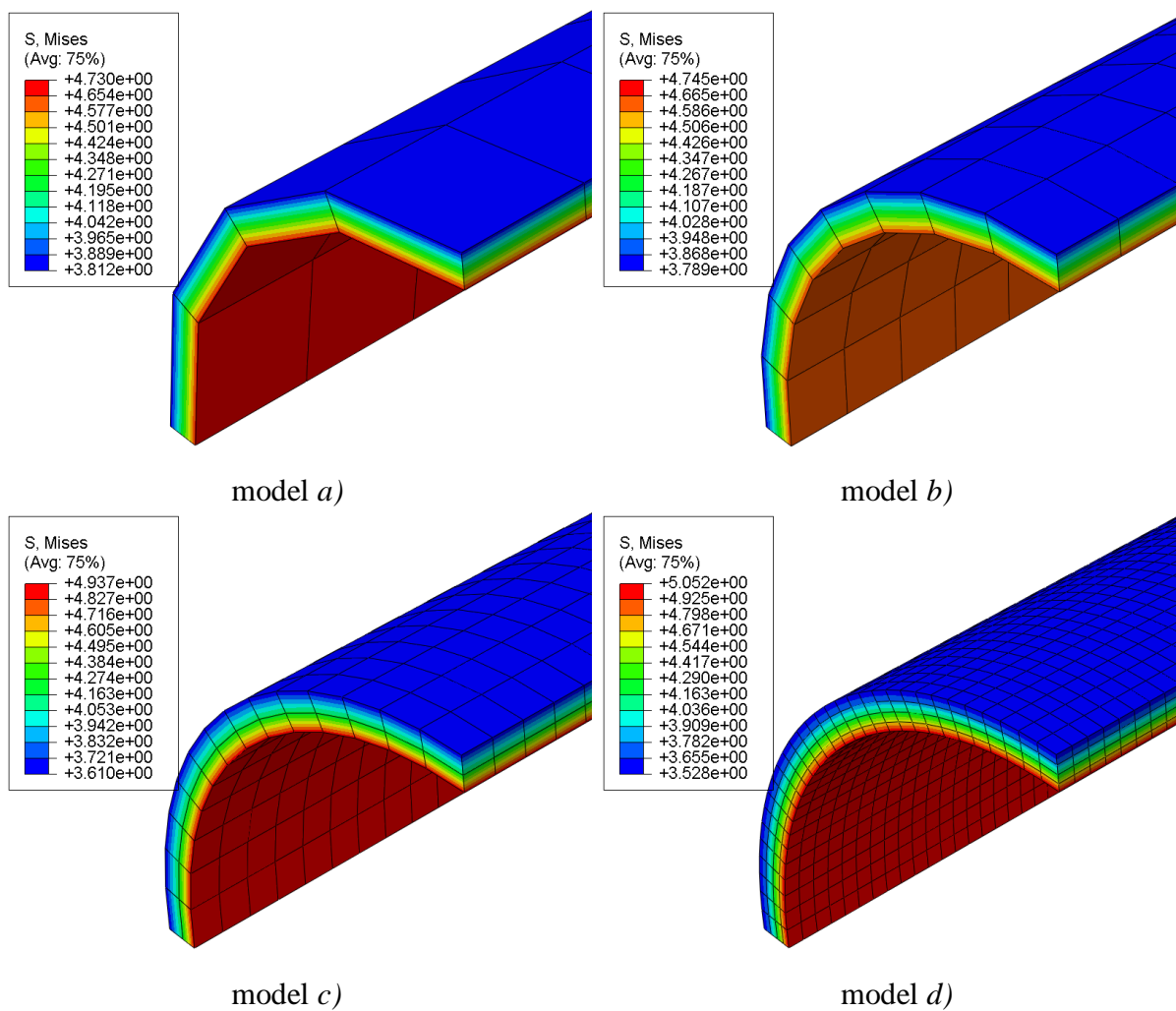
model c) 1456 elemenata



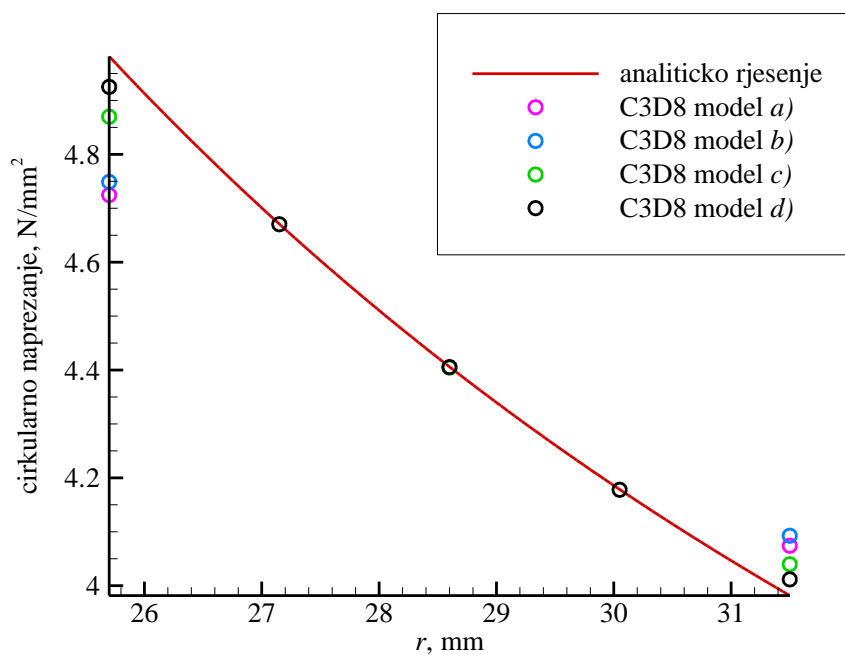
model d) 12772 elementa

Slika 3.15. Mreže konačnih elemenata C3D8

Deformirani oblici za gornje slučajeve diskretizacije modela a)-d) s prikazom ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu nalaze se na slici 3.16, dok slika 3.17. dalje u nastavku prikazuje graf konvergencije cirkularnog naprezanja.



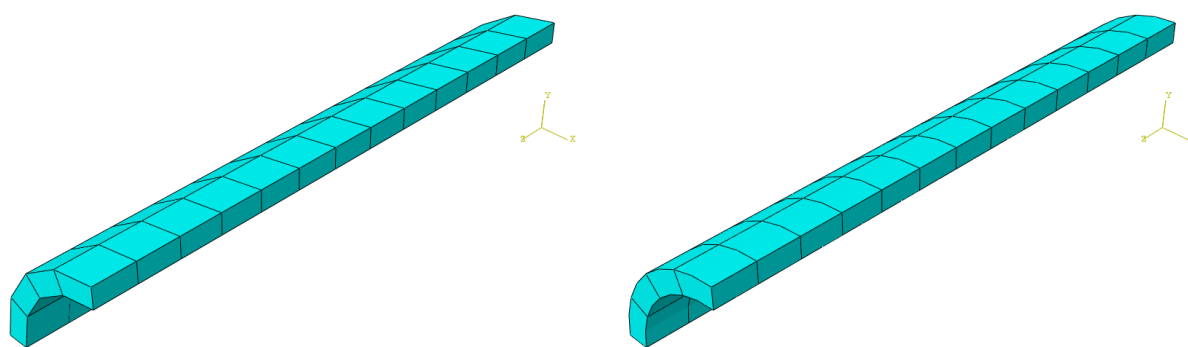
Slika 3.16. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm²), C3D8



Slika 3.17. Konvergencija cirkularnog naprezanja modela diskretiziranih C3D8 elementima

3.1.2.2. Trodimenzijski element C3D20

Mreže za četiri različito diskretizirana modela kvantitativno su jednake mrežama prikazanim slikom 3.15., međutim mijenjaju se kvalitativno jer C3D20 konačni element ima tri čvora po svakom rubu, što mu omogućuje opisivanje geometrije po paraboli drugog reda, odnosno moći će točnije opisati geometriju cijevi. Kao primjer dana je usporedba mreža najmanje gustoće za diskretizaciju C3D8 i C3D20 konačnim elementima, slika 3.18.



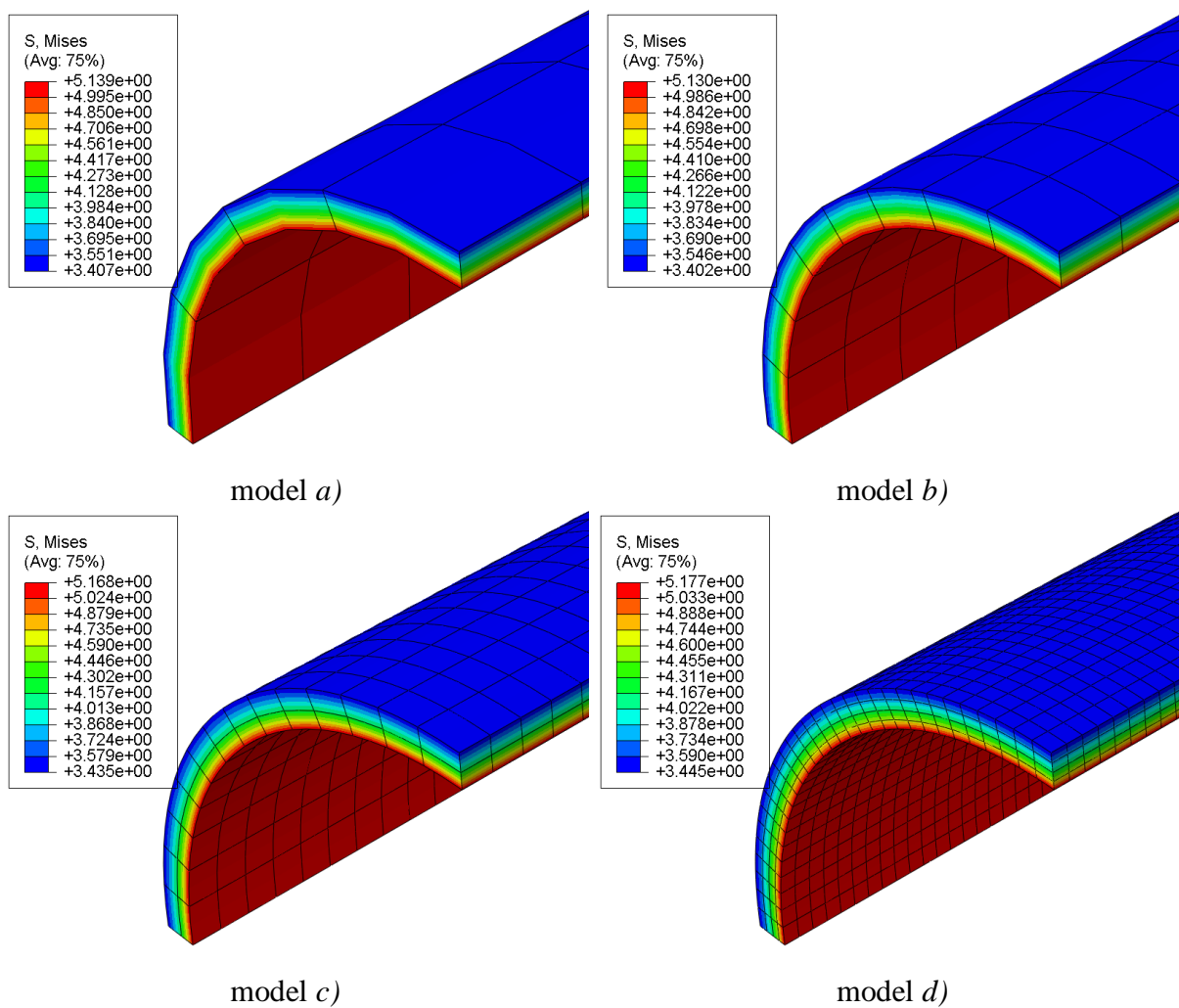
a) C3D8

b) C3D20

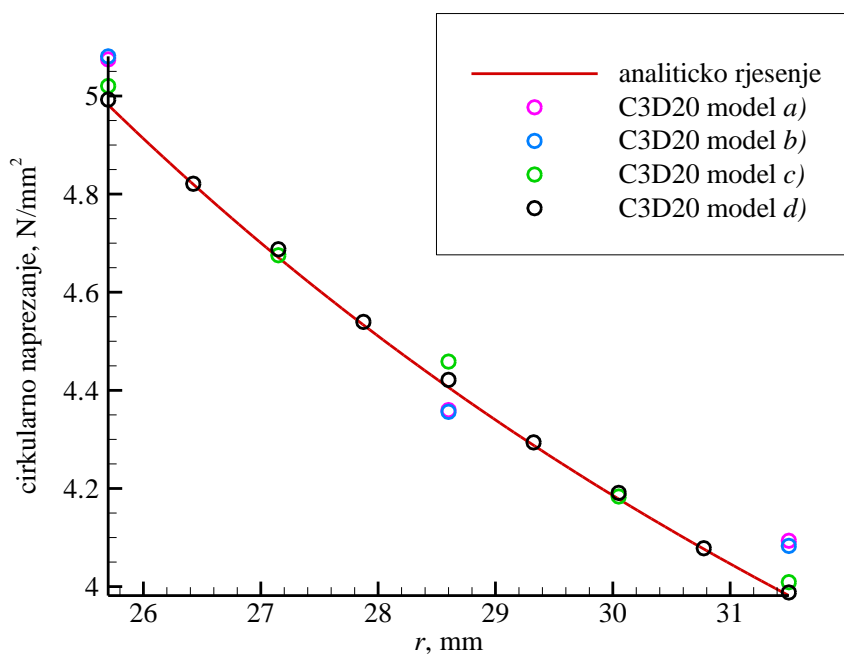
Slika 3.18. Kvalitativna usporedba diskretizacije

Deformirano stanje cijevi s prikazom ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu za slučajeve diskretizacije C3D20 elementima prema slici 3.15. dano je u nastavku, slika 3.19.

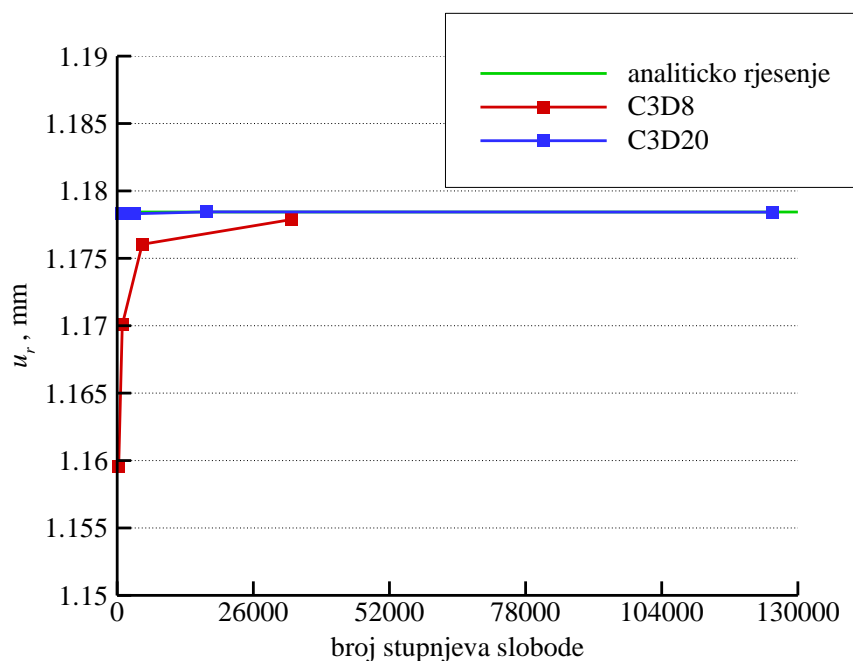
Grafovi konvergencije cirkularnog naprezanja za C3D20 konačni element i radijalnog pomaka unutarnje stjenke cijevi za oba slučaja diskretizacije navedenim trodimenzijskim elementima prikazani su redom na slici 3.20. i slici 3.21.



Slika 3.19. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm²), C3D20



Slika 3.20. Konvergencija cirkularnog naprezanja modela diskretiziranih C3D20 elementima

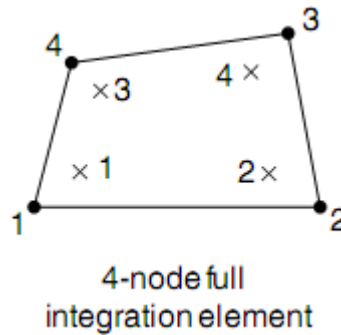


Slika 3.21. Konvergencija radijalnog pomaka trodimenzijskih konačnih elemenata

Na dijagramu na slici 3.20. uočava se monotona konvergencija cirkularnog naprezanja prema analitičkom rješenju. Iz gornjeg se dijagrama ustanovljava kako se za isti broj stupnjeva slobode C3D20 konačnim elementima mogu dobiti bolja rješenja, u ovom slučaju radijalni pomaci, nego kad bi se diskretizacija vršila C3D8 elementima. Naravno, radijalni pomaci za oba tipa trodimenzijskih elemenata također konvergiraju monotono, što ih, uz sve ostalo gore navedeno, svrstava u grupu konformnih elemenata.

3.1.3. Ljuskasti konačni elementi

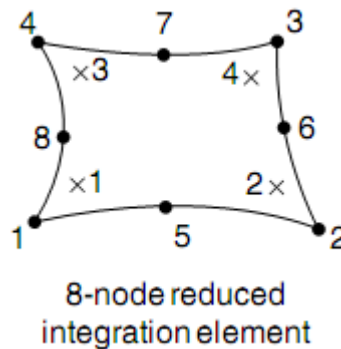
U nastavku će za analizu cijevi biti upotrebljeni ljuskasti elementi sa četiri čvora od kojih svaki sadrži šest stupnjeva slobode gibanja, odnosno S4 elementi, slika 3.22. te ljuskasti elementi drugog reda s osam čvorova s po šest stupnjeva slobode gibanja te s uključenom opcijom za reduciranu integraciju, tj. elementi tipa S8R, kakav je prikazan na slici 3.23.



Slika 3.22. Ljuskasti element S4 [7]

Vektor stupnjeva slobode za element prikazan gornjom slikom je sljedeći:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4], \\ \mathbf{v}_i^T &= [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_{ix} \quad \varphi_{iy} \quad \varphi_{iz}], \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (3.15)$$



Slika 3.23. Ljuskasti element S8R [7]

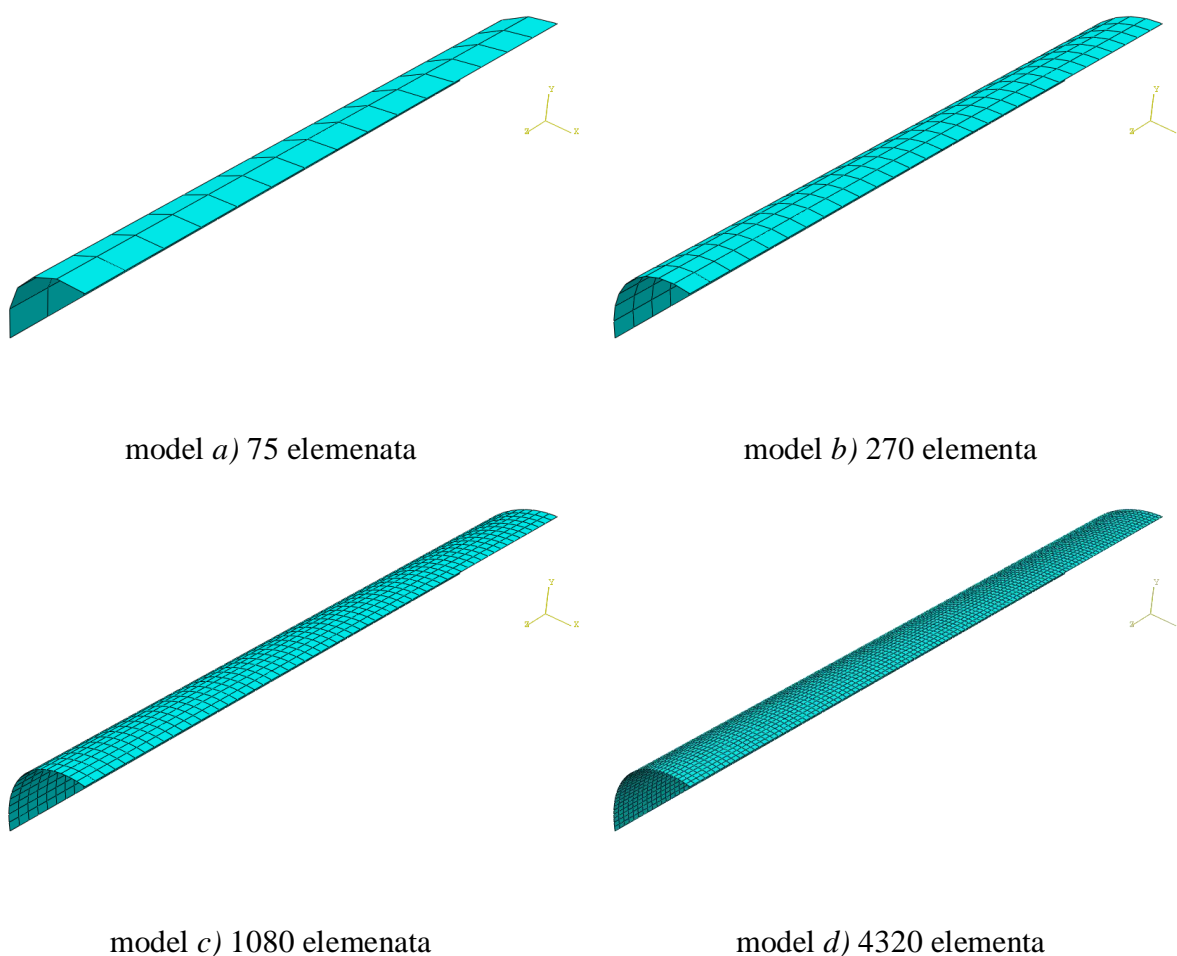
Vektor stupnjeva slobode za S8R tip elementa izgleda:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4 \quad \mathbf{v}_5 \quad \mathbf{v}_6 \quad \mathbf{v}_7 \quad \mathbf{v}_8], \\ \mathbf{v}_i^T &= [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_{ix} \quad \varphi_{iy} \quad \varphi_{iz}], \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.1.3.1. Ljuskasti element S4

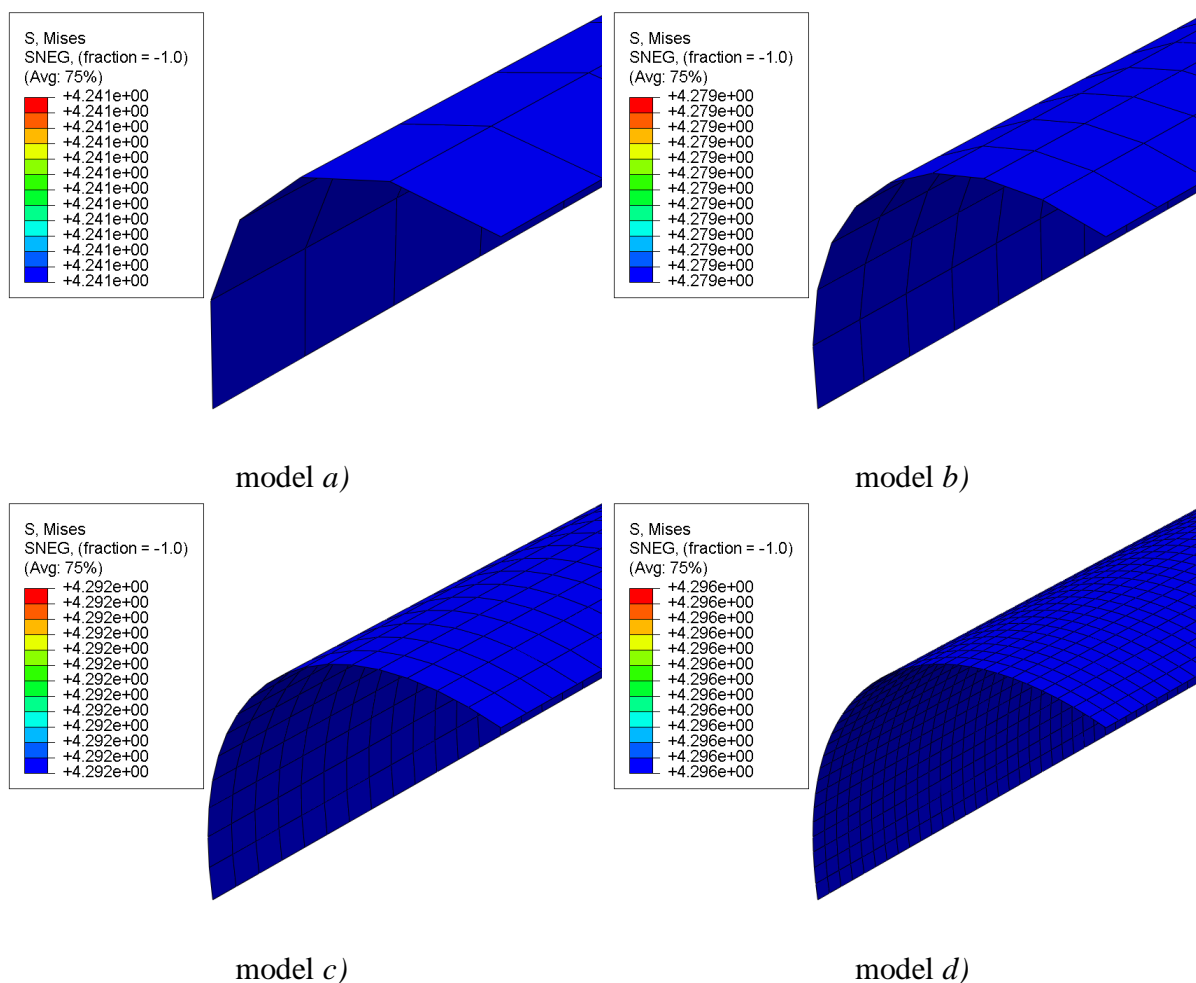
Isto kao i kod modeliranja trodimenzijskim elementima, kao razmatrani problem uzet će se osmina cijevi te primijeniti odgovarajući uvjeti simetrije, baš kao što je to prikazano slikom 3.14., uz razliku što geometrijski model ljuske neće imati dimenziju debljine, već se modelira samo srednja ploha na radijusu R_m . Također, uz komponente pomaka na presjecima, sprečavaju se i odgovarajuće komponente kutova zakreta.

Na slici 3.24. prikazane su mreže četiri različite gustoće konačnih elemenata S4.



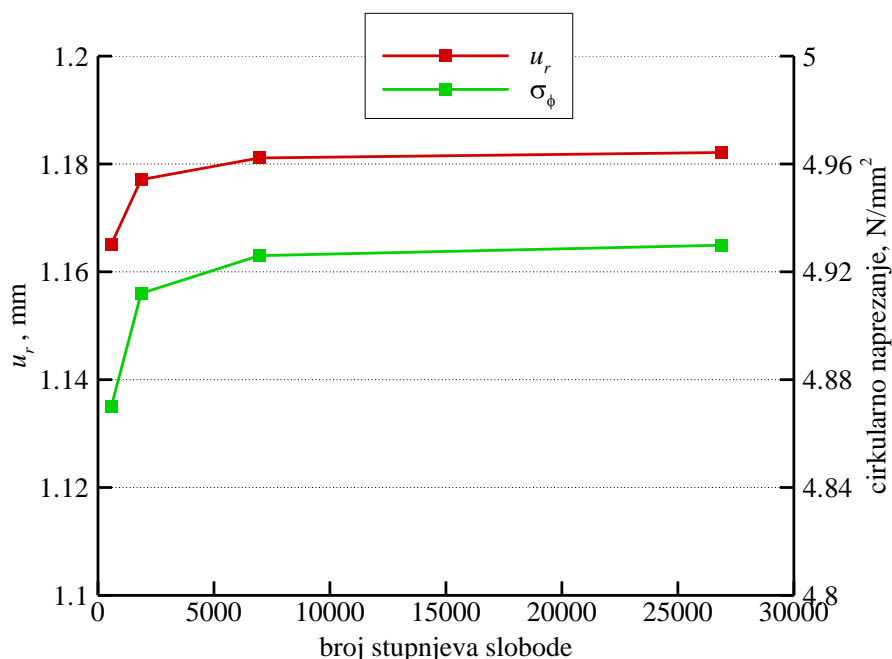
Slika 3.24. Mreže konačnih elemenata S4

Deformirana stanja cijevi za četiri diskretizacije dane gornjom slikom, slika 3.24., prikazana su na slici 3.25.



Slika 3.25. Raspodjela ekvivalentnih napreznja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm²), S4

S donjeg dijagrama konvergencije, slika 3.26, može se uočiti kako vrijednosti cirkularnog napreznja i radijalnog pomaka monotono teže nekoj konačnoj vrijednosti, međutim relativne greške koje se pojavljuju u odnosu na analitičko rješenje odgovarajućih veličina za srednju ravninu (na osnovu koje je model i napravljen), veoma su velike.



Slika 3.26. Konvergencija radijalnog pomaka i cirkularnog naprezanja ljuskastih elemenata S4

U sljedećoj tablici, tablica 3.1., nalaze se relativne greške vrijednosti cirkularnih naprezanja i radijalnih pomaka čvorova u odnosu na analitičko rješenje za srednju ravninu.

Tablica 3.1. Relativne greške vrijednosti radijalnih pomaka i cirkularnih naprezanja ljuskastog S4 elementa u odnosu na analitičko rješenje za srednju ravninu debele cijevi

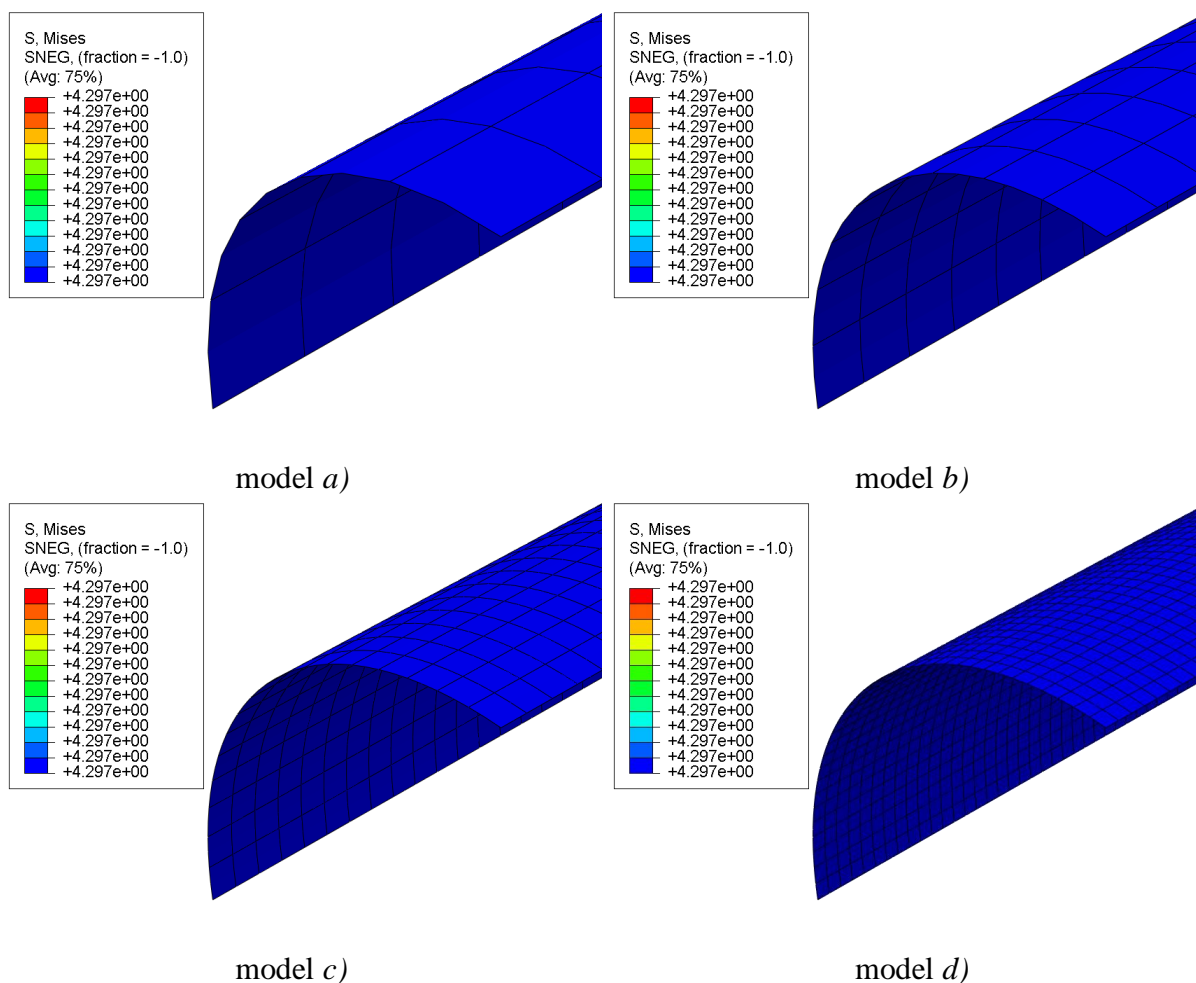
	model a)	model b)	model c)	model d)
Δu_r (%)	7,79%	8,9%	9,27%	9,37%
$\Delta \sigma_\phi$ (%)	10,5%	11,5%	11,8%	11,9%

Vidi se da greške nikako nisu zanemarive, štoviše, može se reći da se debelostjene cijevi ne mogu korektno opisati ljuskastim elementima. Razlog tomu je što se u stvarnosti u debelostjenim cijevima javlja različito stanje naprezanja nego što je to u ljuskama, za koje su ljuskasti elementi naravno i predviđeni. Također, tlak u slučaju 3D modela djeluje na unutarnjoj stijenci cijevi, dok je kod ljuskastog modela on raspodijeljen po njezinoj srednjoj plohi. Kako djeluje na većoj površini, tlak na srednjoj plohi ljuske uzrokuje i veće opterećenje pa i veće pomake i naprezanja u odnosu na 3D model. Za daljnji tijek analize koji će se ticati podmodeliranja koristit će se baš ljuskasti elementi za modeliranje globalnog modela, dok će se podmodel modelirati trodimenzijskim elementima. Rezultati nisu najtočniji, ali poslužiti će u svrhu prikaza prednosti podmodela.

3.1.3.2. Ljuskasti element S8R

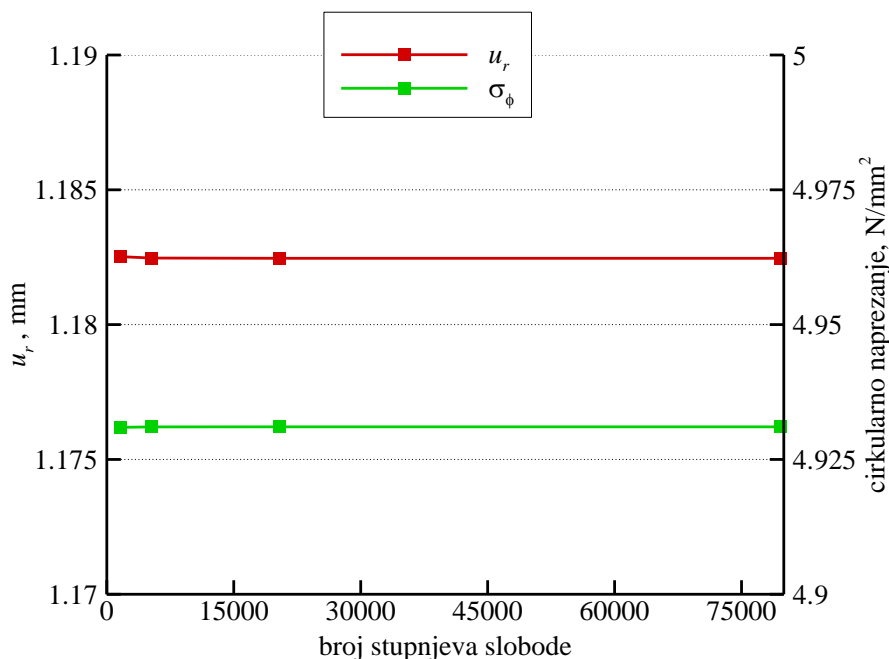
Što se diskretizacije tiče, ona ostaje ista kao i u prethodnom primjeru, slika 3.24, ali opis zakrivljene geometrije cijevi postaje bolji zbog postojanja središnjeg čvora na svakom od bridova, baš kao što je to pokazano za C3D20 tip elementa na slici 3.18.

Deformirani oblici s prikazom ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu prikazani su u nastavku, slika 3.27.



Slika 3.27. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm²), S8R

Konvergenciju radijalnog pomaka i cirkularnog naprezanja prikazuje slika 3.28.



Slika 3.28. Konvergencija radijalnog pomaka i cirkularnog naprezanja ljuskastih elemenata S8R

Kao što je to bio slučaj i s trodimenzijskim konačnim elementima drugog reda, i ljuskasti elementi drugog reda prikazuju veoma brzu konvergenciju radijalnih pomaka, s tim da su sada i cirkularna naprezanja čak i za najrjeđu mrežu praktički dostigla svoju konačnu vrijednost.

3.1.4. Zaključak

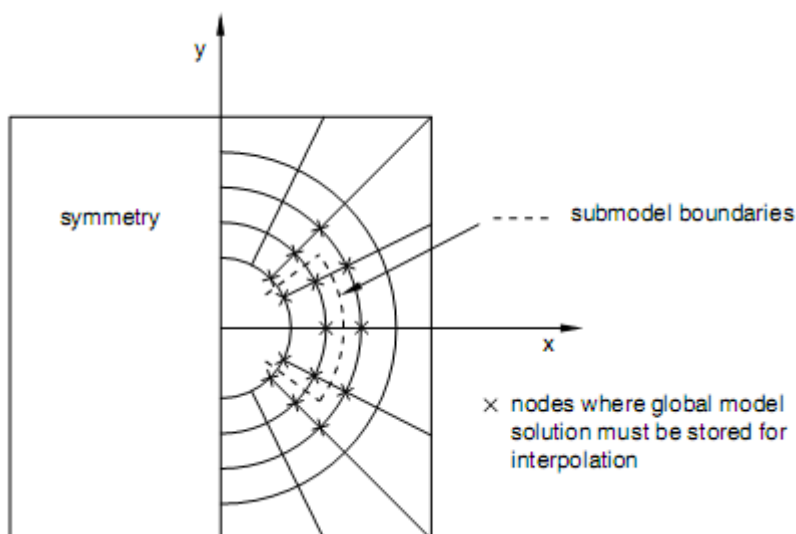
Općenito se može reći kako elementi drugog reda pokazuju bržu konvergenciju od elemenata prvog reda, tj. za isti broj stupnjeva slobode mogu točnije opisati raspodjelu pomaka, odnosno naprezanja u nekoj konstrukciji. To svojstvo posebice dolazi do izražaja ukoliko u konstrukciji postoje mjesta s velikim gradijentima naprezanja, gdje bi za točno opisivanje polja pomaka, odnosno deformacija, bio potreban puno veći broj elemenata prvog reda, nego kada bi diskretizirali s odgovarajućim elementima drugog reda. Zbog tog će se razloga u daljnjem tijeku rada prilikom modeliranja pukotine koristiti trodimenzijski elementi drugog reda, pošto su upravo u njenom okruženju izraženi gradijenti naprezanja.

3.2. Podmodeliranje [4]

Tehnika podmodeliranja koristi se u numeričkoj analizi konačnim elementima kako bi se detaljnije proučilo područje interesa u modelu. U ovom će se poglavlju razmatrati cijev s unutarnjom aksijalnom polueliptičnom pukotinom koja predstavlja mjesto geometrijskog diskontinuiteta, a samim time i mjesto pojave velikih gradijenata naprezanja, pa će upravo okolina pukotine postati područje interesa. Mreža konačnih elemenata bit će najgušća u samom vrhu pukotine pošto se tamo pojavljuju najveći gradijenti naprezanja, te će postajati sve rjeđa odmicanjem od pukotine gdje njen utjecaj sve više slabi, a naprezanja više ne pokazuju skokovite odlike. Upravo tehnika podmodeliranja, u ovom slučaju *shell-to-solid*, omogućuje profinjenje mreže na lokalnom 3D modelu (podmodelu) te njegovo povezivanje s globalnim, relativno rijetko diskretiziranim ljuskastim modelom. Povezivanje se vrši interpolacijom rezultata (pomaka) sa čvorova globalnog modela (pogonski čvorovi) na odgovarajuće rubne čvorove podmodela (pogonjene čvorove), uz zadovoljavanje odgovarajućih tolerancija. Kako ne bi došlo do pogrešaka u rezultatima podmodela, povezivanje se mora izvršiti dovoljno daleko od mjesta koncentracije naprezanja, gdje rezultati globalnog modela više toliko ne odstupaju.

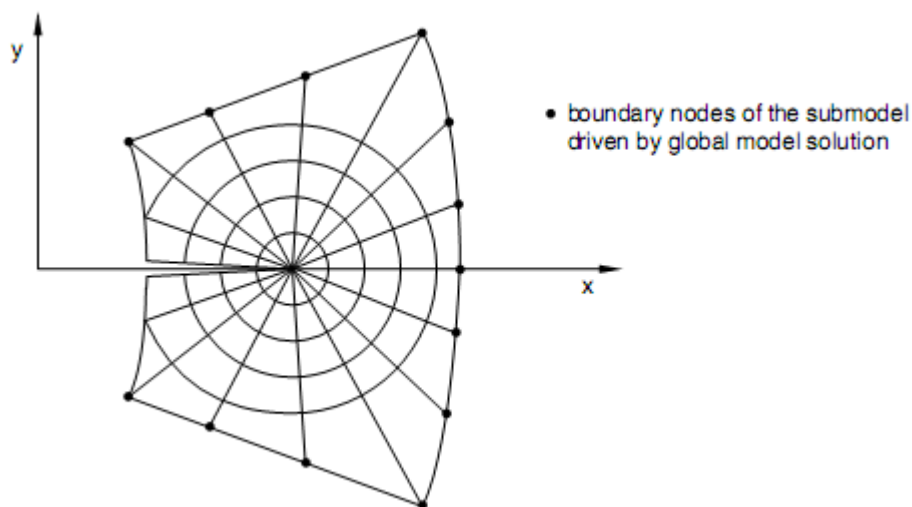
3.2.1. Čvorna tehnika podmodeliranja [7]

Čvorna tehnika je najčešća i najopćenitija tehnika podmodeliranja koja koristi rezultate u čvorovima (pomake, temperaturu, tlak) za interpolaciju rezultata globalnog modela na čvorove podmodela. Na sljedećoj slici dan je prikaz globalnog modela, slika 3.29.



Slika 3.29. Globalni model [7]

Uvećani prikaz podmodela zajedno s upravljanim čvorovima prikazuje slika 3.30.

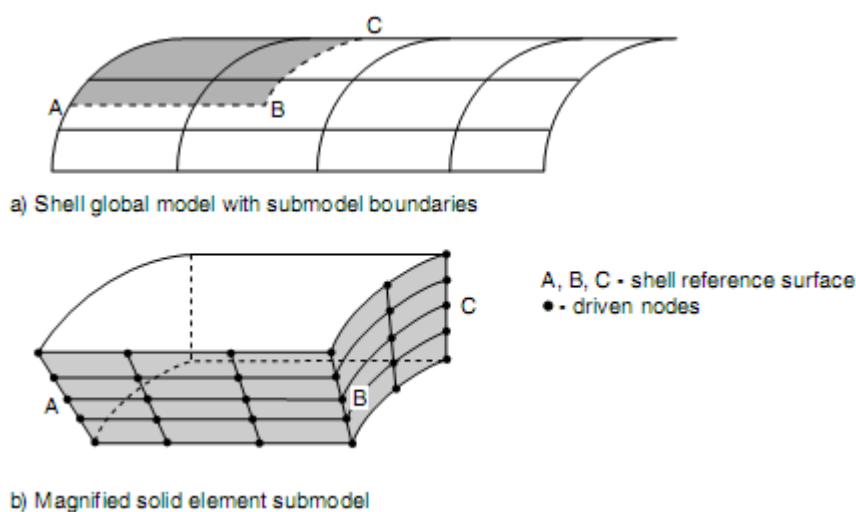


Slika 3.30. Uvećani prikaz podmodela i pogonjenih čvorova [7]

Dakle, analiza globalnog modela i analiza podmodela vrše se odvojeno, a jedina veza između njih su globalne varijable (odnosno varijable iz globalne analize) koje se spremaju u izlaznu bazu te kasnije pridružuju čvorovima na rubu podmodela. Takav princip odvojenih analiza omogućuje da u sljedećem koraku razmatrani podmodel postane globalni model za neki još manji podmodel, što se teoretski može raditi neograničen broj razina.

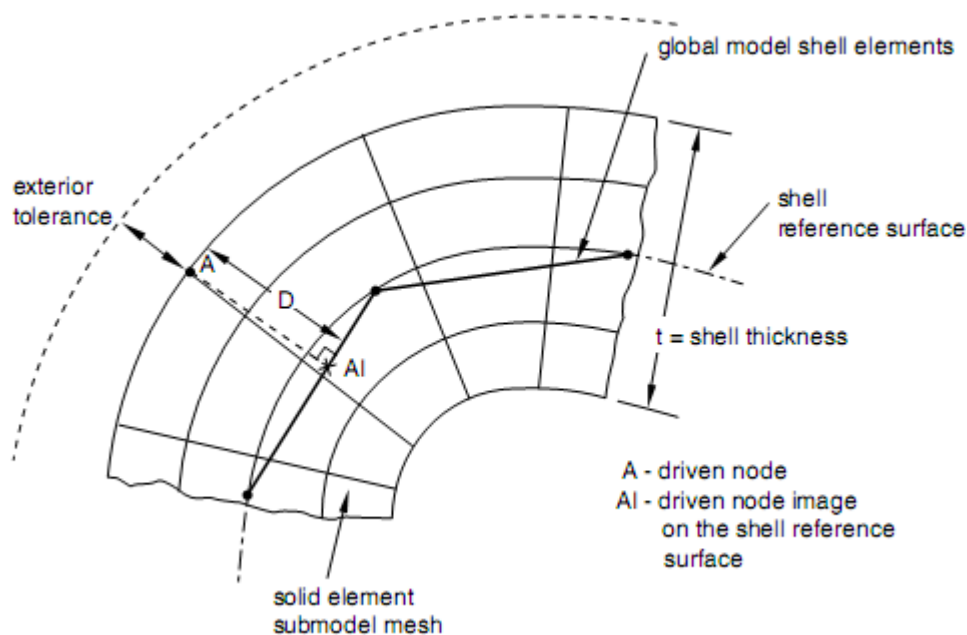
3.2.1.1. *Shell-to-solid* podmodeliranje

Kao što je rečeno ranije, kod ovakve tehnike podmodeliranja podmodel se sastoji od 3D *solid* elemenata te zamjenjuje područje interesa na globalnom modelu koji je sastavljen od konvencionalnih ljuskastih elemenata, slika 3.31. Rub podmodela skup je površina pogonjen čvornim vrijednostima globalnog modela na liniji A-B-C.



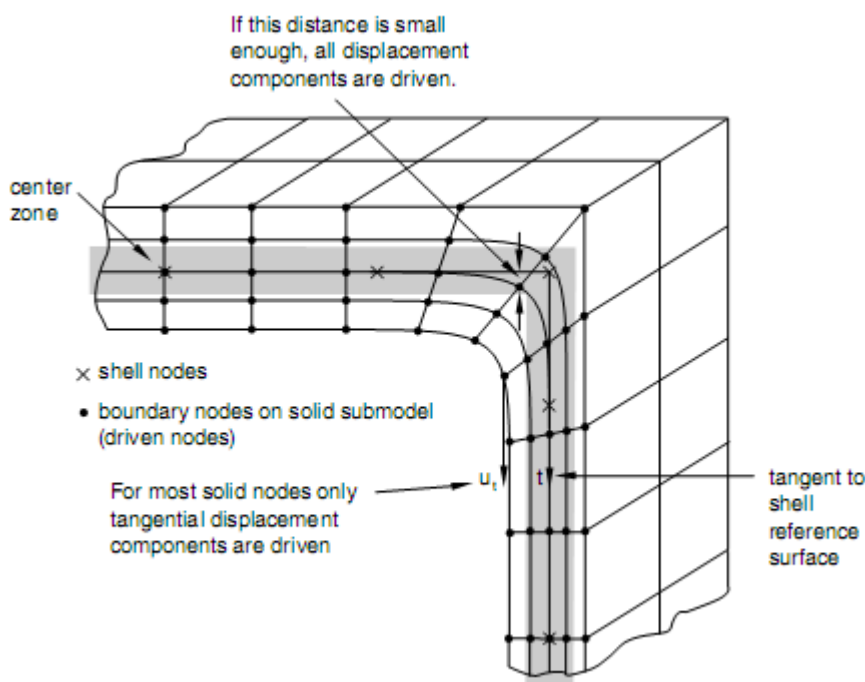
Slika 3.31. Globalni model i podmodel kod *shell-to-solid* podmodeliranja [7]

Udaljenost rubnih čvorova podmodela od slobodne površine globalnog modela u koje će se ekstrapolirati rješenje globalnog modela određeno je geometrijskom tolerancijom. U ABAQUS-u je definirano da se čvorovi podmodela moraju nalaziti unutar udaljenosti koja se računa množeći prosječnu veličinu elementa globalnog modela s 0,05, dakle unutar 5%. Naravno da se ta vrijednost može i mijenjati. Način provjere zadovoljava li neki čvor podmodela zadanu toleranciju prikazuje slika 2.32.



Slika 3.32. Vanjska tolerancija kod shell-to-solid podmodeliranja [7]

Da bi čvorovi podmodela bili upravljani od strane globalnog modela, moraju ležati unutar centralne zone. Sve komponente pomaka upravljane su kod čvorova koji leže na referentnoj površini ili unutar centralne zone. Za čvorove koji leže podalje od referentne površine i izvan centralne zone izjednačavaju se pomaci globalnog modela i pomaci pogonjenog čvora samo u tangencijalnom smjeru (smjer t na slici 3.33.). Debljina centralne zone je u ABAQUS-u podešena na 10% debljine ljuske, no može se po potrebi podesiti na neku drugu vrijednost. Ukoliko nijedan čvor podmodela ne leži unutar centralne zone, program će javiti grešku.

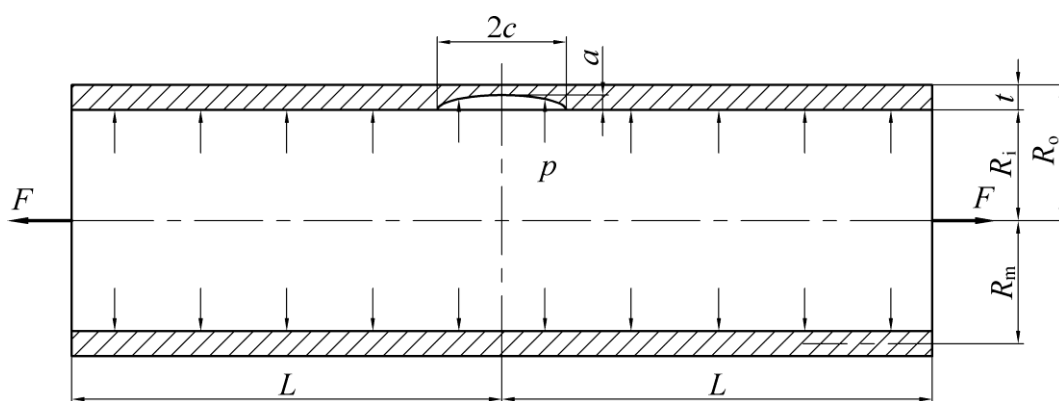


Slika 3.33. Centralna zona [7]

U nastavku će se prikazati globalni model temeljem čijeg rješenja će se odgovarajućim podmodelima dodijeliti rubni uvjeti na njihovim spojevima, no prije toga valjalo bi navesti samu geometriju pukotine.

3.2.2. Geometrija pukotine

Kada se na unutarnjoj stijenci cijevi prema slici 2.2. uvede polueliptična osna pukotina duljine $2c$ i dubine a , cijev u poprečnom presjeku izgleda kao što to prikazuje slika 3.34.

Slika 3.34. Cijev s unutarnjom aksijalnom polueliptičnom pukotinom opterećena unutarnjim tlakom p

U ovom radu analizirani su sljedeći omjeri veličine pukotine i debljine stijenke:

$$\frac{a}{t} = 0,6 \quad \text{i} \quad (3.17)$$

$$\frac{c}{a} = 5, \quad (3.18)$$

iz kojih proizlazi da su dimenzije pukotine:

$$a = 3,48 \text{ mm} \quad \text{i} \quad (3.19)$$

$$c = 17,4 \text{ mm}. \quad (3.20)$$

Pritom je duljina cijevi L odabrana na način da rubovi cijevi ne bi imali utjecaj na deformiranje pukotine, odnosno da je zadovoljena nejednakost [4]:

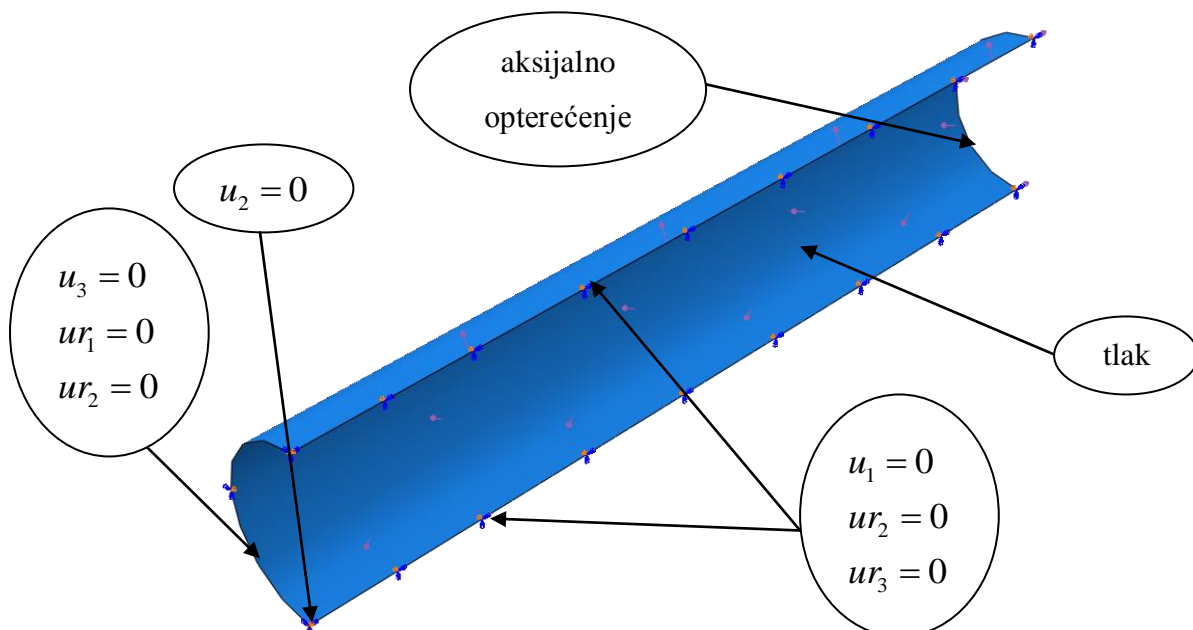
$$\frac{L}{c} \geq 10, \quad (3.21)$$

pa se iz tog razloga uzima:

$$L = 300 \text{ mm}. \quad (3.22)$$

3.2.3. Globalni model

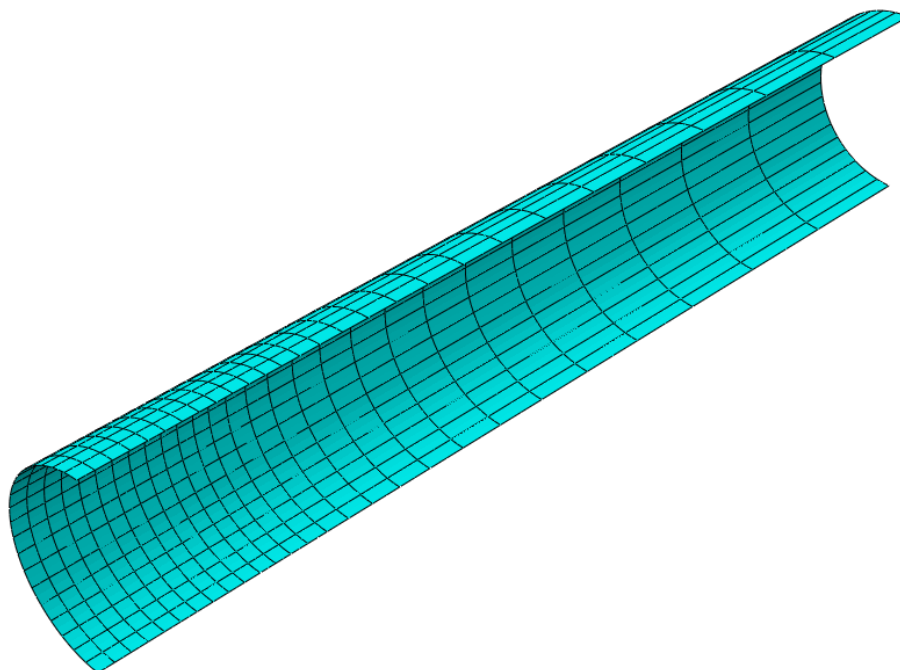
Zbog postojanja pukotine sada se kao model uzima četvrtina cijevi (dvostruka simetrija), a rubni uvjeti koji su joj dodijeljeni dani su na slici 3.35.



Slika 3.35. Rubni uvjeti globalnog modela

Pomak u_2 jednak je nuli kako bi se spriječili svi pomaci krutog tijela te na taj način omogućila kasnija usporedba radijalnih pomaka.

Mrežu konačnih elemenata globalnog modela prikazuje slika 3.36.



Slika 3.36. Mreža globalnog modela

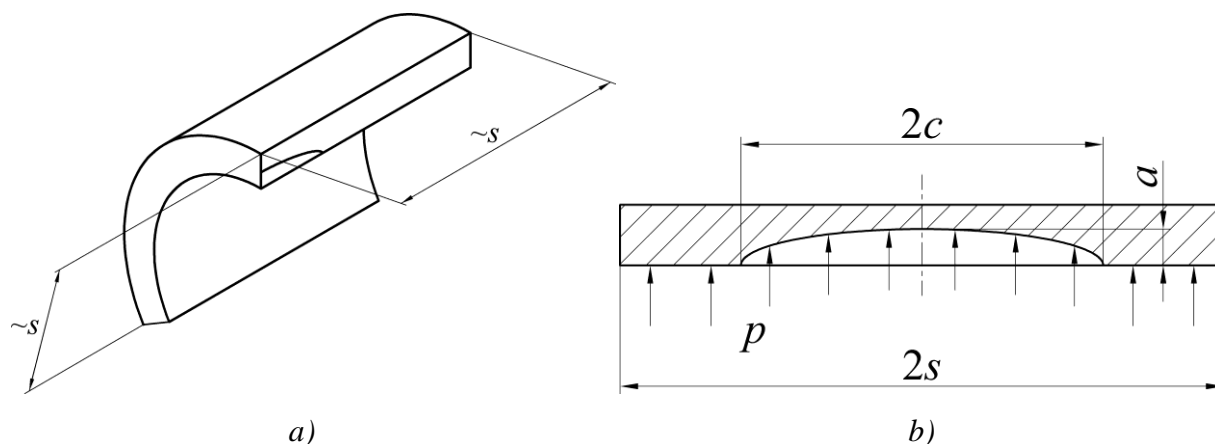
Mreža se sastoji od 540 S8R ljuskastih konačnih elemenata, i gušća je na rubu gdje će se kasnije modelirati pukotina, odnosno vezati podmodeli.

Na tako definiran globalni model prvo će se vezati podmodel bez pukotine kako bi se pokazala određena svojstva takvog sustava, a nakon toga pratit će se ponašanje podmodela s pukotinom.

3.2.4. Geometrija podmodela

Duljina podmodela s odabire se, kao što je rečeno iznad, tako da se izbjegnu koncentracije naprezanja u blizini pukotine zbog kojih bi podmodel mogao davati krive rezultate. Za model cijevi s pukotinom opisan bezdimenzijskim parametrima $R_1/t=10$, $c/a=10$ i $a/t=0,4$ ustanovljeno je kako za omjere duljina podmodela i pukotine $s/c=3$ i veće relativna greška koeficijenta intenzivnosti naprezanja K pada ispod 0,5% što je gotovo identično rješenju 3D modela, odnosno izbjegnut je utjecaj lokalnog savijanja [5]. Referencirajući se na taj podatak, u obzir će ući podmodeli čiji će omjer duljine i duljine pukotine upravo iznositi $s/c=3$, iako se bezdimenzijski parametri razmatrane cijevi razlikuju od gore navedenih, odnosno iznose $R_1/t \approx 4,5$, $c/a=5$ i $a/t=0,6$. Može se uočiti kako je takva cijev deblja od referentne te

se zbog toga mogu očekivati i nešto netočniji rezultati analize. Geometrija podmodela prikazana je ispod, slika 3.37.

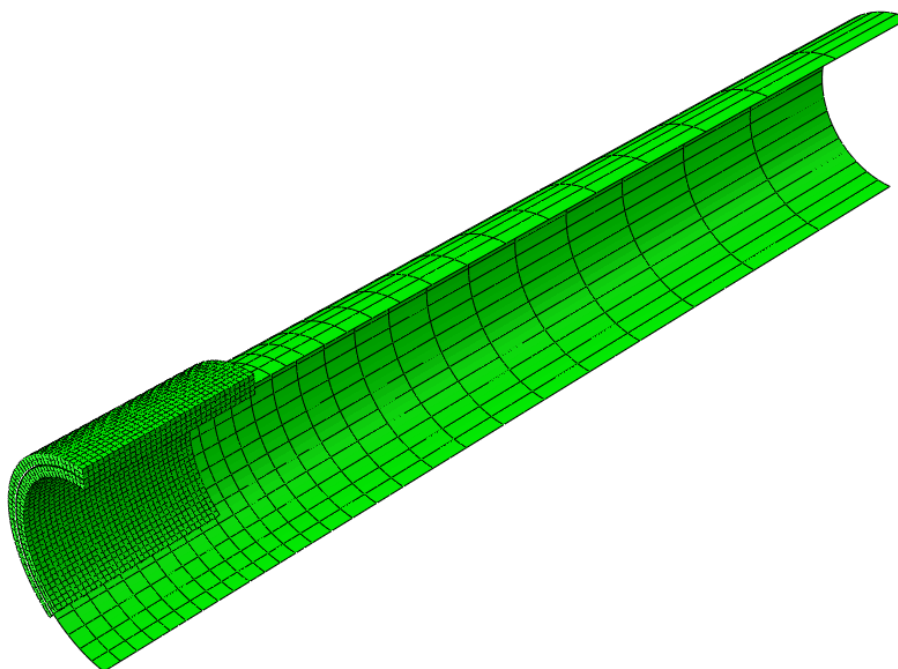


Slika 3.37. Geometrija podmodela: a) 3D model, b) dvostruka duljina podmodela

Na slici 3.37. b) može se vidjeti kako će tlak ulaziti u pukotinu te tako pomagati njenom širenju.

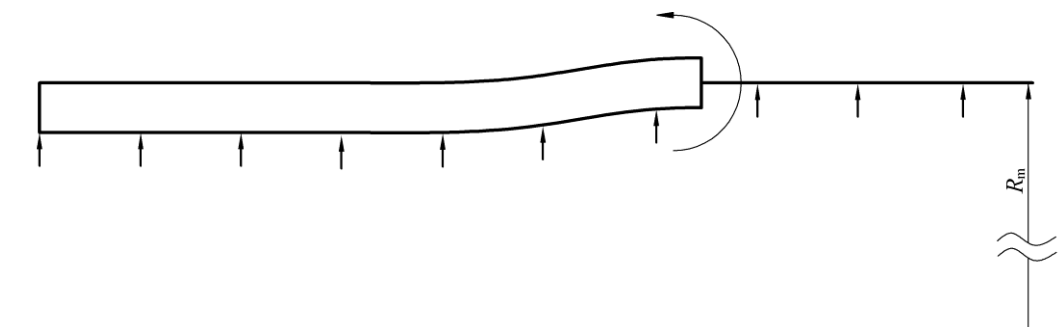
3.2.5. Podmodel bez pukotine

Podmodel bez pukotine sastoji od 6528 C3D20 konačnih elemenata, a njegov spoj (*overlay plot*) s globalnim modelom dan je na slici 3.38.

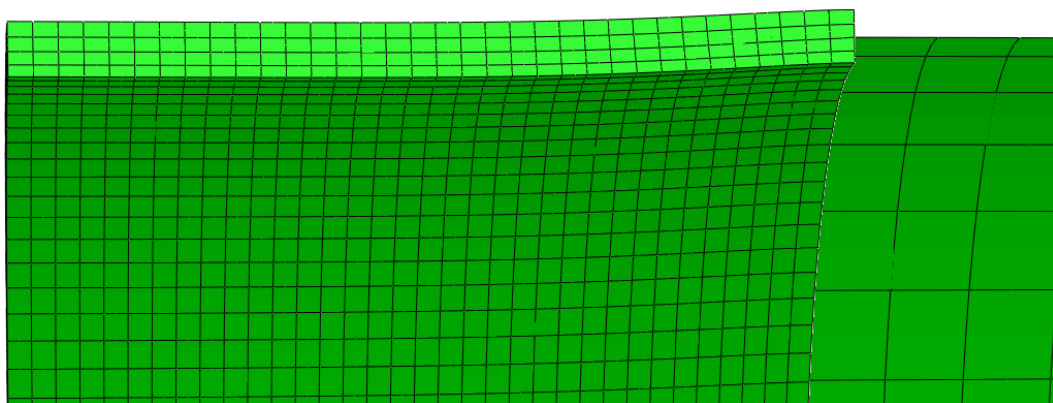


Slika 3.38. Podmodel bez pukotine prikazan u spoju s globalnim modelom

Kako podmodel ima debljinu te ga tlak koji djeluje na njegovoj unutarnjoj stjenci manje opterećuje, nego što je to slučaj kod globalnog modela gdje je taj isti tlak raspoređen po stjenci većeg radijusa ($R_m > R_i$), dolazi do lokalnog savijanja na samom spoju dvaju modela. Veće opterećenje na ljuskastom modelu uvjetuje i veće radijalne pomake koji ulaze u rubni uvjet podmodela, a kako ti pomaci nadilaze pomake podmodela dolazi upravo do spomenutog lokalnog savijanja. Međutim, kada se u podmodel uvede pukotina, najprije se poništi utjecaj savijanja, a tek onda dolazi do otvaranja pukotine [4]. Opisana pojava nepodudaranja pomaka i savijanja podmodela te njegovog utjecaja na cirkularno naprezanje koje u ovom slučaju otvara pukotinu jer je okomito na njenu ravninu, mnogo je uočljivija kod debljih cijevi, kakva se zapravo ovdje i razmatra. Shematski prikaz raspodjele tlaka po unutarnjoj stjenci podmodela bez pukotine u spoju s globalnim modelom dan je na slici 2.39., a njihovo deformirano stanje gdje se dobro uočava lokalno savijanje prikazano je na slici 3.40.



Slika 3.39. Shematski prikaz lokalnog savijanja i raspodjele tlaka po deformiranoj konfiguraciji



Slika 3.40. Lokalno savijanje podmodela

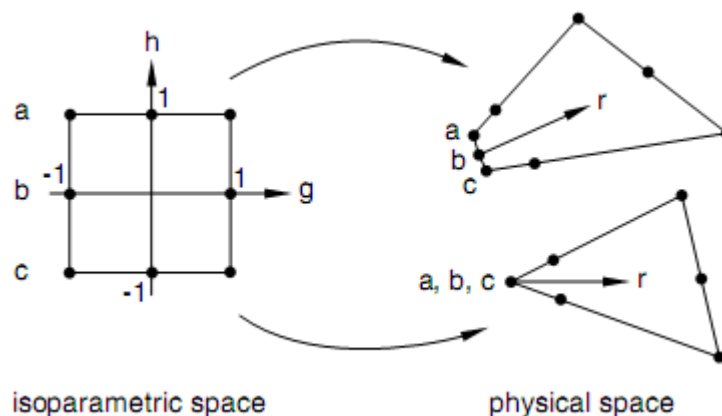
Prije no što se detaljnije počne analizirati podmodel s pukotinom, ukratko će se dati opis singularnih konačnih elemenata koji se koriste pri modeliranju pukotine za analizu u linearno elastičnom području.

3.2.6. Singularni konačni elementi [3]

Pukotine su se u početku razvoja mehanike loma modelirale veoma gustom mrežom izoparametarskih konačnih elemenata, što je s dovoljnom točnošću moglo opisivati velike gradijente naprezanja oko pukotine samo za najjednostavnije inženjerske probleme. Daljnjim proučavanjem konvergencije rješenja pokazalo se kako za složenije probleme čak niti veoma gusta diskretizacija ne postiže dovoljno točne rezultate oko vrška pukotine. Zbog toga se krenulo s razvojem specijaliziranih konačnih elemenata za primjenu u mehanici loma, koji će moći opisivati singularitet u samom vrhu pukotine (naprezanje u toj točki teži u beskonačnost). Teorijska rješenja za naprezanja gledano od vrhu pukotine u sebi sadrže član $1/\sqrt{r}$ kod linearno elastične mehanike loma, dok kod elasto-plastične taj član iznosi $1/r$. Znači u vrhu pukotine ($r = 0$) dolazi do pojave singularnosti. Kako je analiza u ovom radu ograničena na linearno-elastično ponašanje materijala, opisat će se singularni elementi upravo za takvo ponašanje materijala.

3.2.6.1. Singularni konačni elementi za opisivanje 2D problema

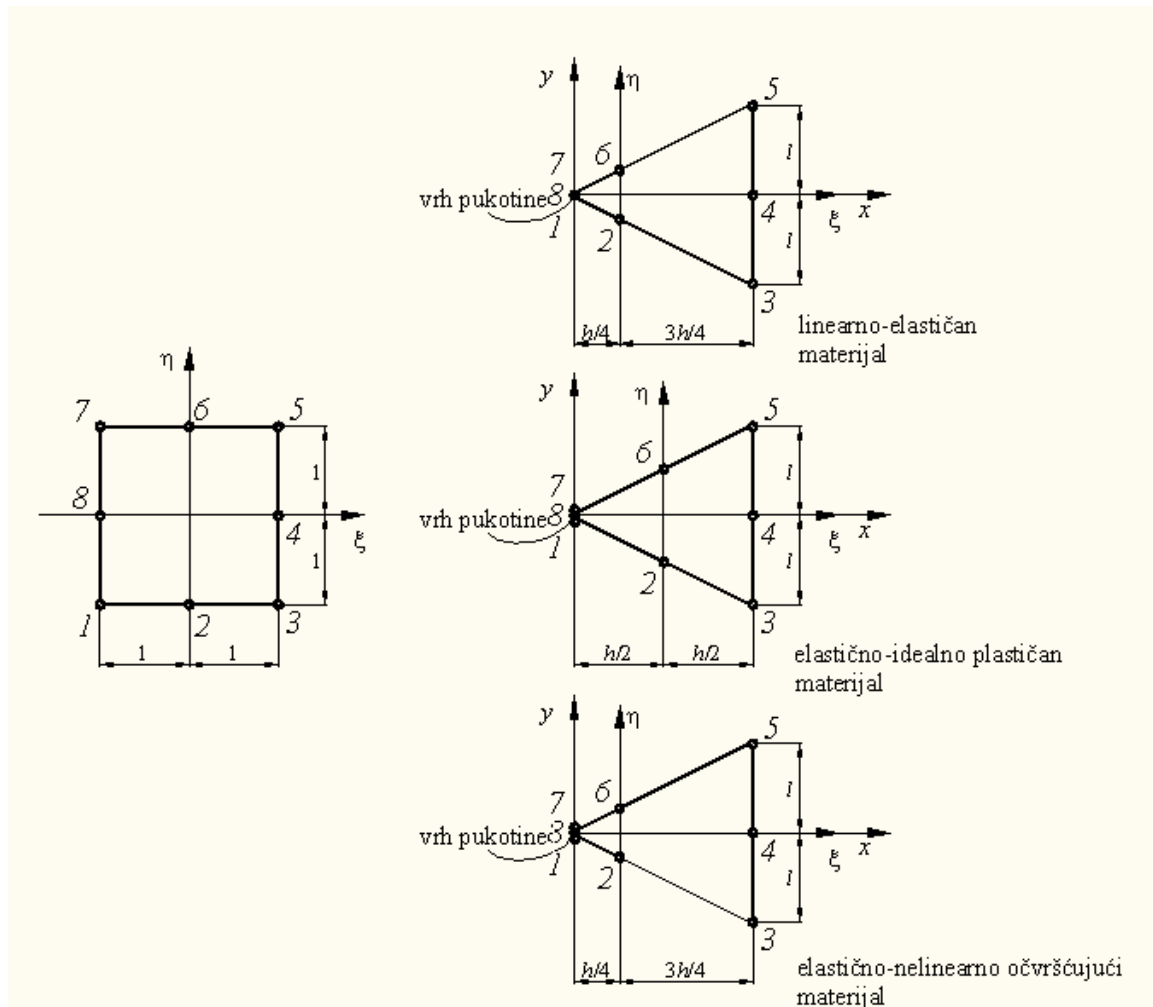
Kako bi se postigao singularitet u vrhu pukotine koriste se elementi koji nastaju kolabiranjem jedne stranice tako da budu zadovoljena dva uvjeta prikazana na slici 3.41.



Slika 3.41. Kolabiranje konačnog elementa kod 2D problema [7]

Za singularitet $\frac{\epsilon\alpha}{\sqrt{r}}$ koji vrijedi za linearno elastično ponašanje materijala, čvorovi a , b i c na gornjoj slici povezuju se zajedno te se tijekom deformiranja pomiču samo kao jedan čvor. Središnji čvorovi na stranicama koje se sastaju u vrhu pukotine moraju biti za četvrtinu duljine stranice odmaknuti od vrha pukotine.

Način pomicanja međučvorova te način sažimanja čvorova u vrhu pukotine, ovisit će o odabranom materijalu, kao što se može vidjeti na slici 3.42.



Slika 3.42. Preslikavanje kvadratnog 8-čvornog elementa u trokutasti izoparametarski element [3]

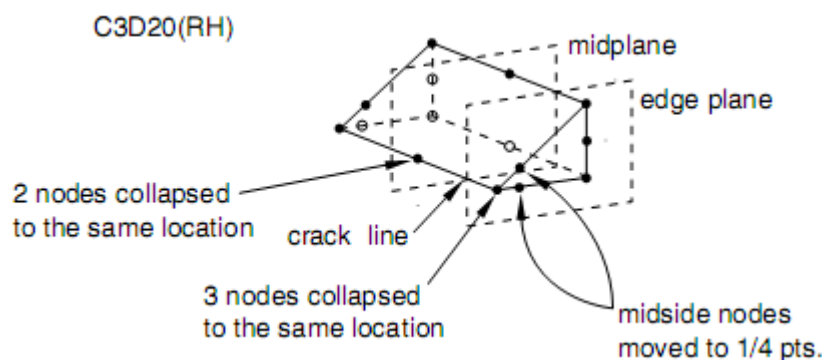
Determinanta Jacobijeve matrice za singularni izoparametarski element prikazan gornjom slikom izgleda:

$$\det|\mathbf{J}| = \frac{hl}{8}(1+\xi)^3. \quad (3.23)$$

Kada u gornji izraz uvrstimo prirodnu koordinatu ξ kolabiranih čvorova 1, 7 i 8 $\xi = -1$, očito je kako vrijednost determinante postaje nula. Dakle, singularnost elementa očituje se u nultoj vrijednosti Jacobijeve matrice za kolabirane čvorove.

3.2.6.2. Singularni konačni elementi za opisivanje 3D problema

Za postizanje singulariteta u vrhu pukotine kod trodimenzijskih problema najčešće se koristi 20 čvorni konačni element oznake C3D20(RH) [7]. Elementi za rješavanje 3D problema kolabiraju se na način da zadovolje dva uvjeta koji su prikazani na slici 3.43.

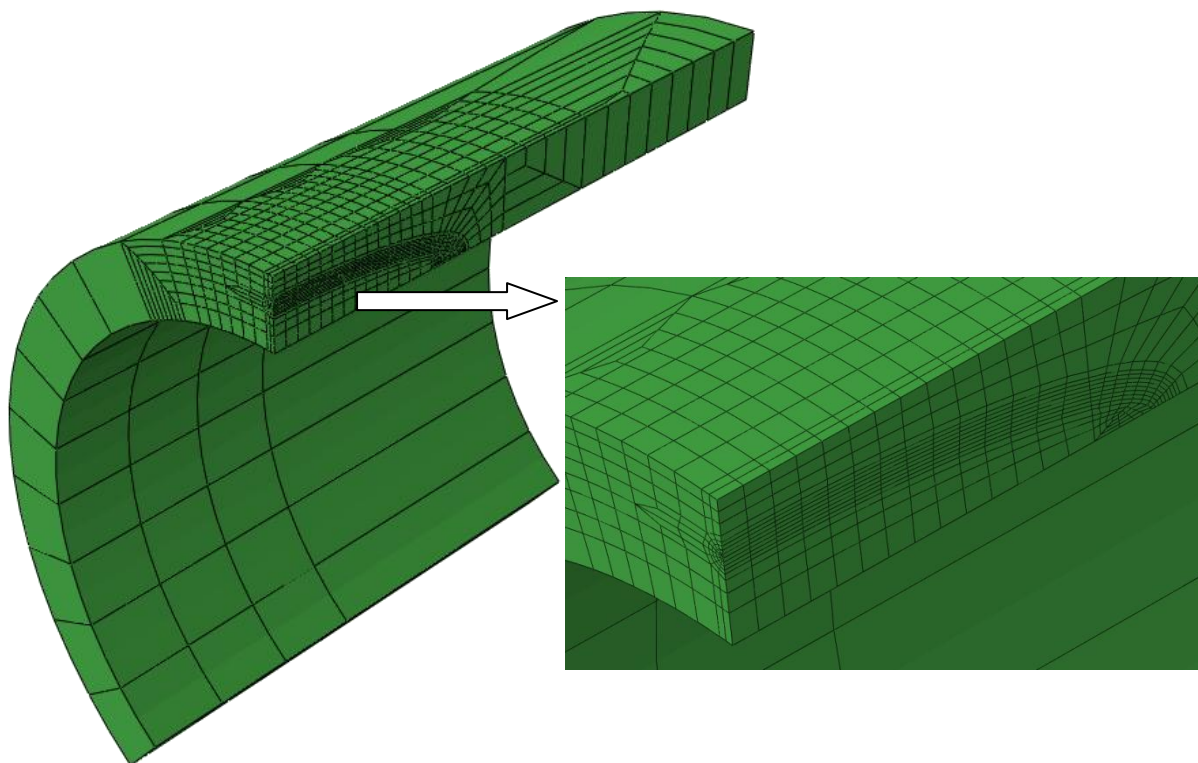


Slika 3.43. Kolabiranje konačnog elementa kod 3D problema [7]

Već navedena vrsta singulariteta $\frac{\epsilon\alpha}{\sqrt{r}}$ dobije se sažimanjem tri čvora jednog brida na rubnoj ravnini elementa tako da poprime isti geometrijski položaj (linija vrha pukotine), odnosno na srednjoj ravnini elementa element kolabira tako da dva čvora poprime isti geometrijski položaj (vrh pukotine). Također je potrebno da središnji čvorovi bridova koji se nalaze na rubnim ravninama elementa i sastaju u liniji vrha pukotine budu na četvrtini duljine stranice od vrha pukotine.

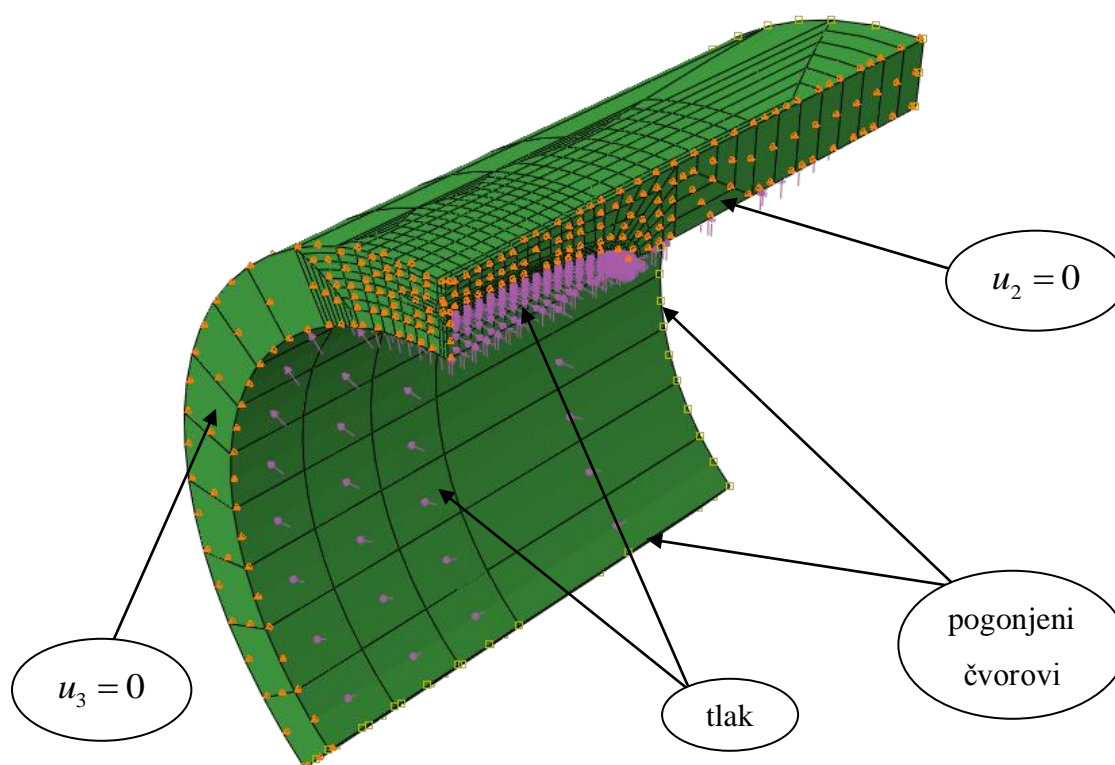
3.2.7. Podmodel s pukotinom

Kao što je rečeno u uvodu potpoglavlja, tehnika podmodeliranja služi u svrhu detaljnije analize područja interesa. U slučaju cijevi s pukotinom, područje interesa upravo postaje pukotina i njena okolina gdje se pojavljuju velike koncentracije naprezanja. Kako bi se ti gradijenti čim bolje opisali potrebna je gusta mreža konačnih elemenata, posebno u samom vrhu pukotine. Na temelju toga, meža konačnih elemenata za podmodel s unutarnjom aksijalnom polueliptičnom pukotinom izgleda kao što to prikazuje slika 3.44. Mreža se sastoji od 2719 konačnih elemenata tipa C3D20R, odnosno uključuje se opcija za reduciranu integraciju, kao što je to preporučeno u [4], a iz razloga kako bi se izbjegli problemi s nestišljivošću. Također, kako bi se korektno modelirala singularnost deformacije u vrhu pukotine, upotrijebili su se kolabirani konačni elementi prikazani na slici 3.43.



Slika 3.44. Mreža podmodela s pukotinom

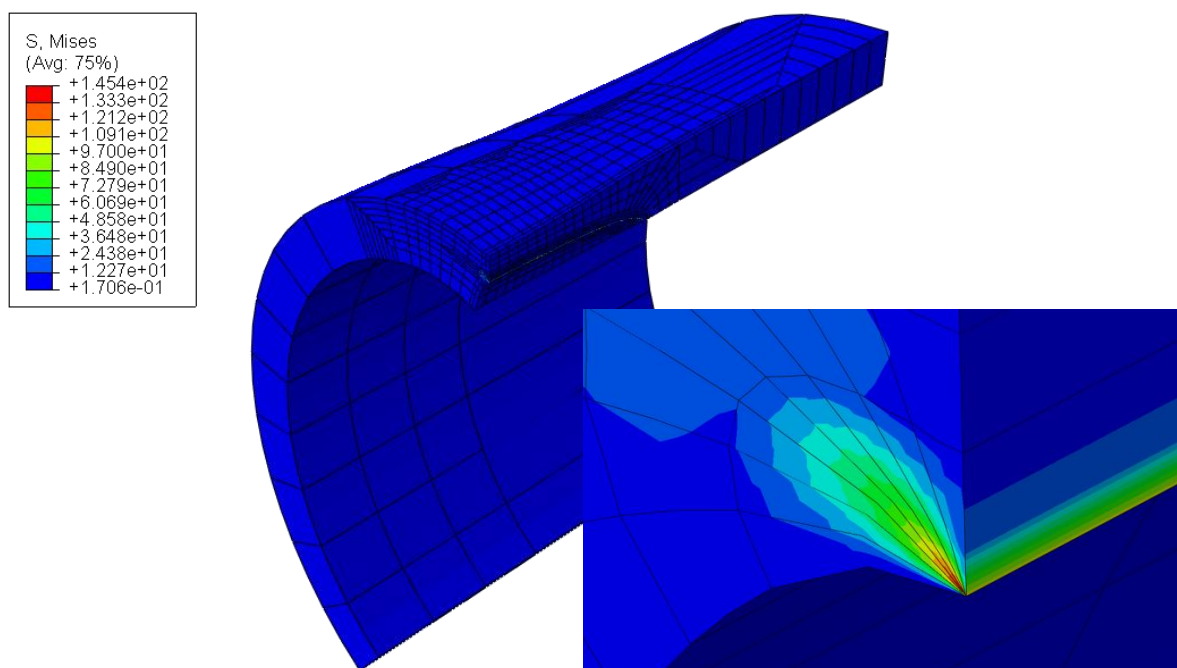
Rubni uvjeti koje pridružujemo opisanom podmodelu dani su na slici 3.45.



Slika 3.45. Rubni uvjeti podmodela s pukotinom

Tlak, kao što se vidi s gornje slike, također djeluje u pukotini te ju nastoji raširiti. Može se pretpostaviti kako će zbog tog utjecaja cirkularna naprezanja na vanjskoj stijenci cijevi iznad

fronte pukotine biti tlačna. Deformirano stanje podmodela s pukotinom s prikazom ekvivalentnih naprezanja prema vin Misesu dano je u nastavku, slika 3.46.

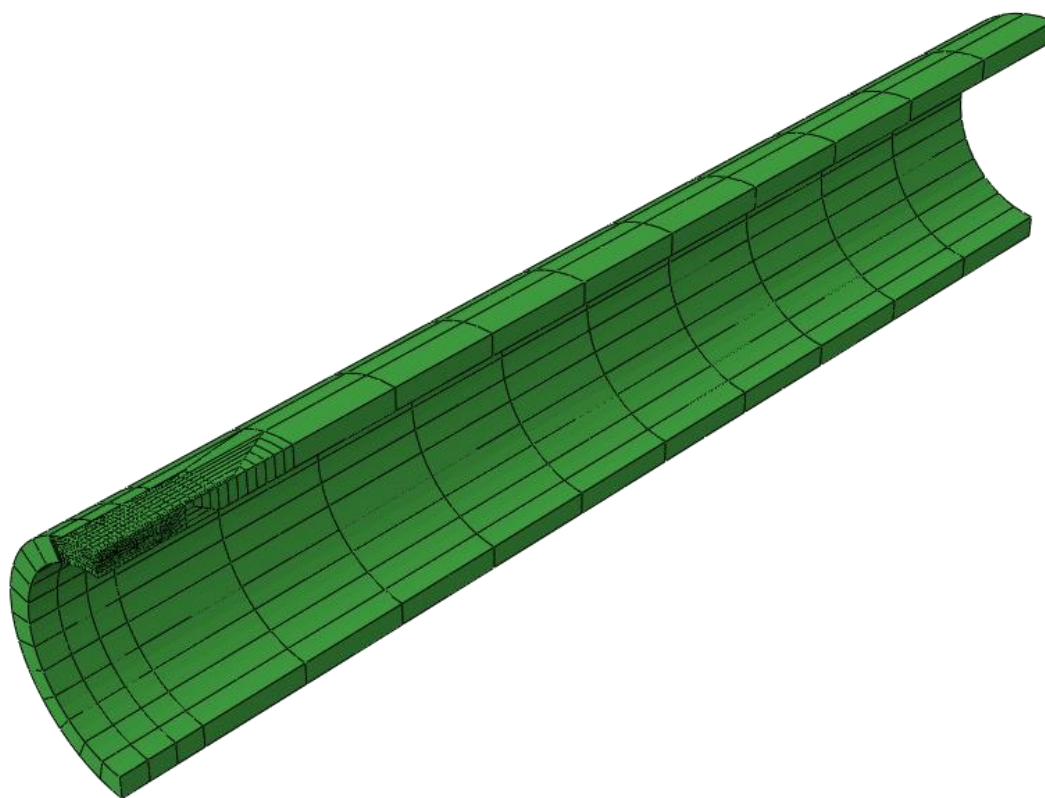


Slika 3.46. Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm²) na podmodelu s pukotinom

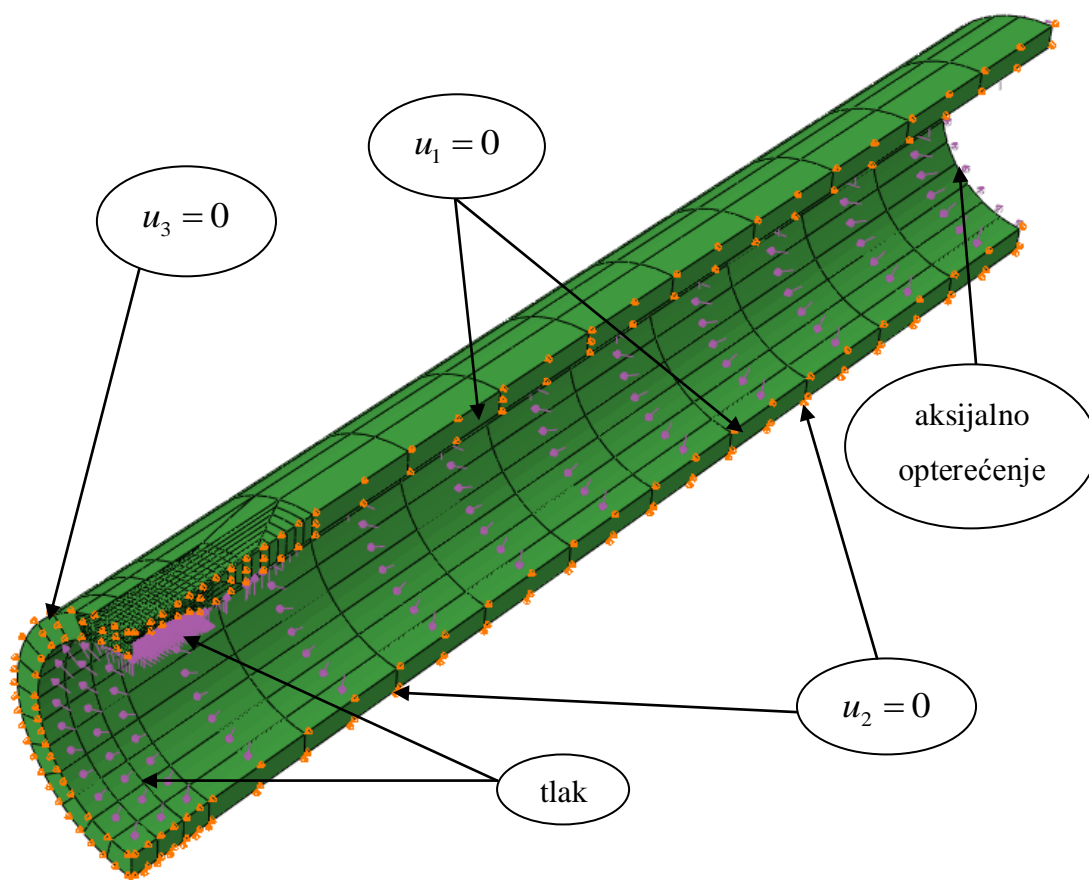
U nastavku će se prikazati i analiza 3D modela cijele cijevi s pukotinom, koji će, dakako, poslužiti kao etalon prema kojem će se ocijeniti točnost gornjeg podmodela.

3.2.8. 3D model cijevi s pukotinom

Područje 3D modela koje se poklapa s područjem podmodela s pukotinom sastoji se od identične mreže, a ostatak cijevi diskretiziran je prilično rijetko, kao što to prikazuje slika 3.47. U nastavku su također prikazani dodijeljeni rubni uvjeti, slika 3.48.

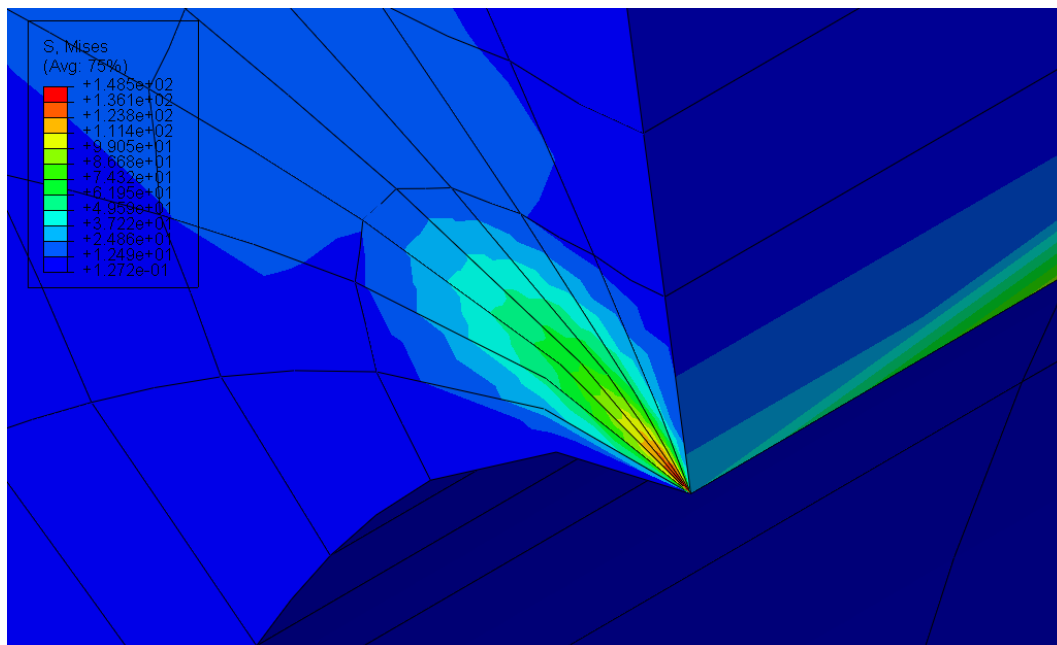


Slika 3.47. Mreža 3D modela cijevi s pukotinom



Slika 3.48. Rubni uvjeti 3D modela cijevi s pukotinom

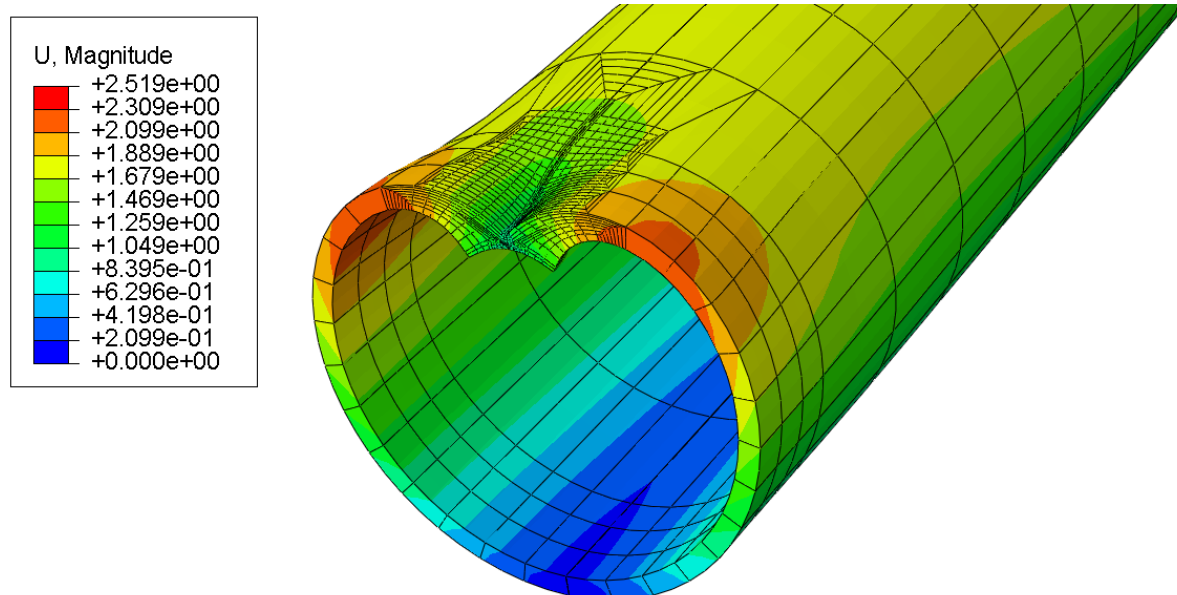
Kao i kod globalnog, ljuskastog modela i na ovom je modelu spriječen pomak u_2 kako ne bi došlo do nekontroliranog pomicanja koje bi onemogućilo usporedbu radijalnih pomaka. Ovog puta pomak je spriječen po cijelom vanjskom bridu na ravnini simetrije $u_1 = 0$. Tako odabran brid predstavlja najudaljenije mjesto od pukotine, a samim time i najneutralnije u odnosu na njenu deformaciju. Rezultati analize dani su na slici 3.49., gdje je prikazan detalj koji obuhvaća vrh pukotine.



Slika 3.49. Detalj oko vrha pukotine deformiranog 3D modela cijevi s prikazom ekvivalentnih naprezanja prema energetske teoriji čvrstoće (σ_{ekv} , N/mm²)

Očitano von Misesovo naprezanje u vrhu pukotine za gornji, referentni slučaj iznosi 148,5 N/mm², dok za slučaj podmodela s pukotinom prikazanog slikom 3.46., naprezanje iznosi 145,4 N/mm², što predstavlja relativnu grešku od samo -2,09%. Također, može se primijetiti kako je naprezanje u vrhu pukotine oko trideset puta veće, nego što je to slučaj kod cijevi bez pukotine.

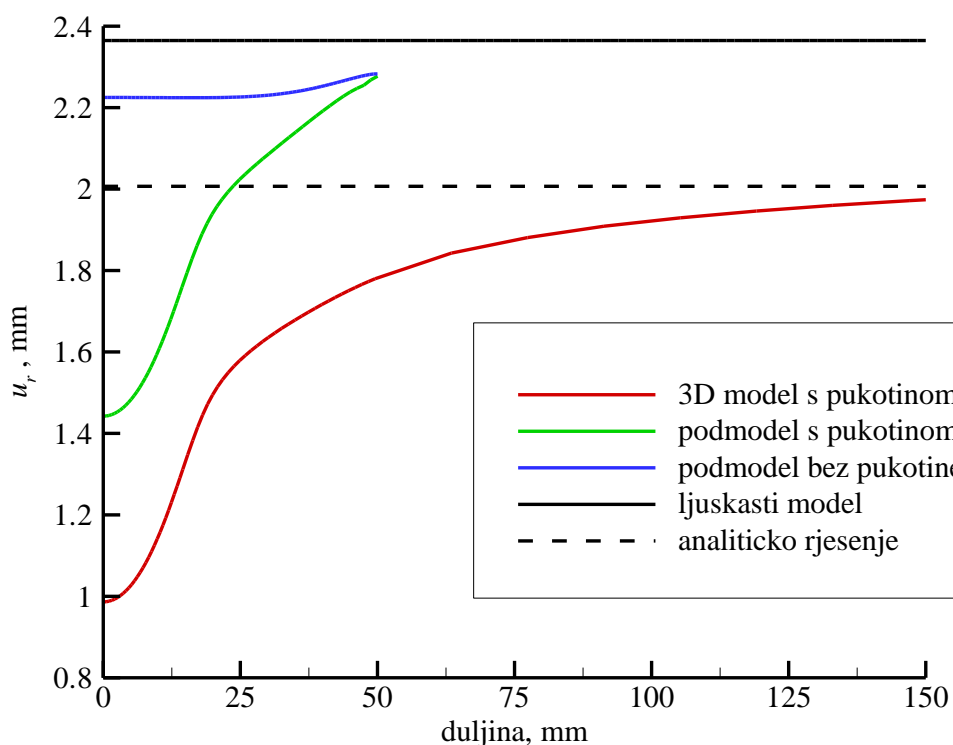
Deformirani oblik polovice cijevi s prikazom polja pomaka (*scale factor* 10) prikazan je na slici 3.50.



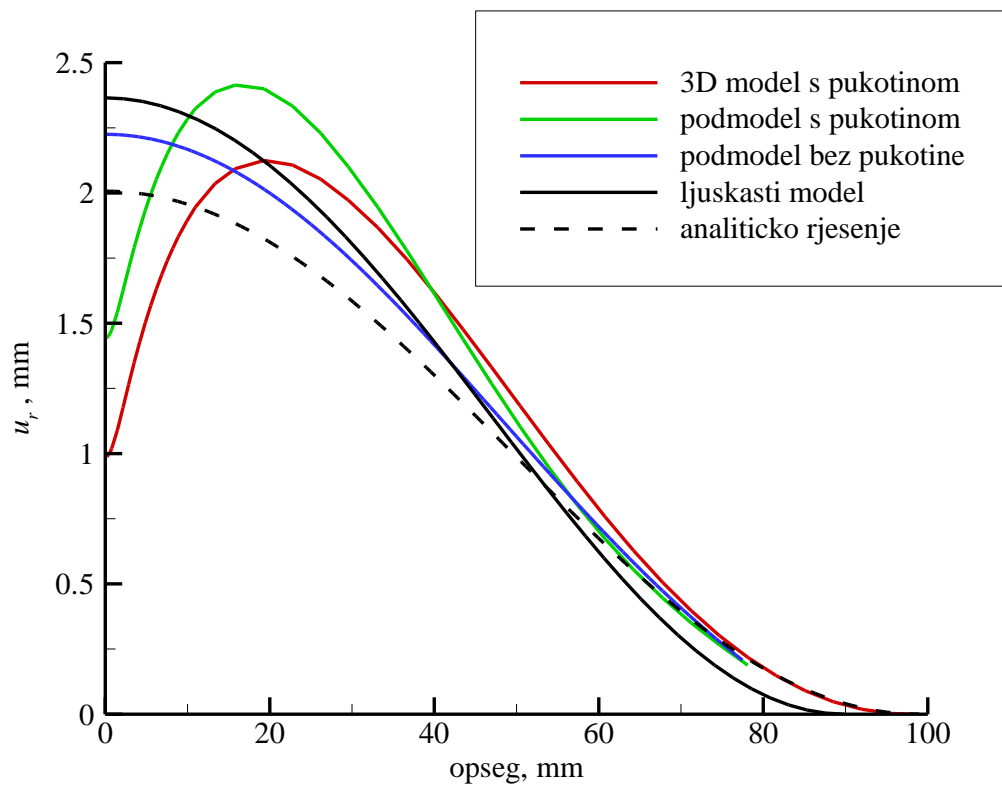
Slika 3.50. Deformirana polovica 3D modela cijevi s prikazom polja pomaka (u , mm)

3.2.9. Usporedba rezultata

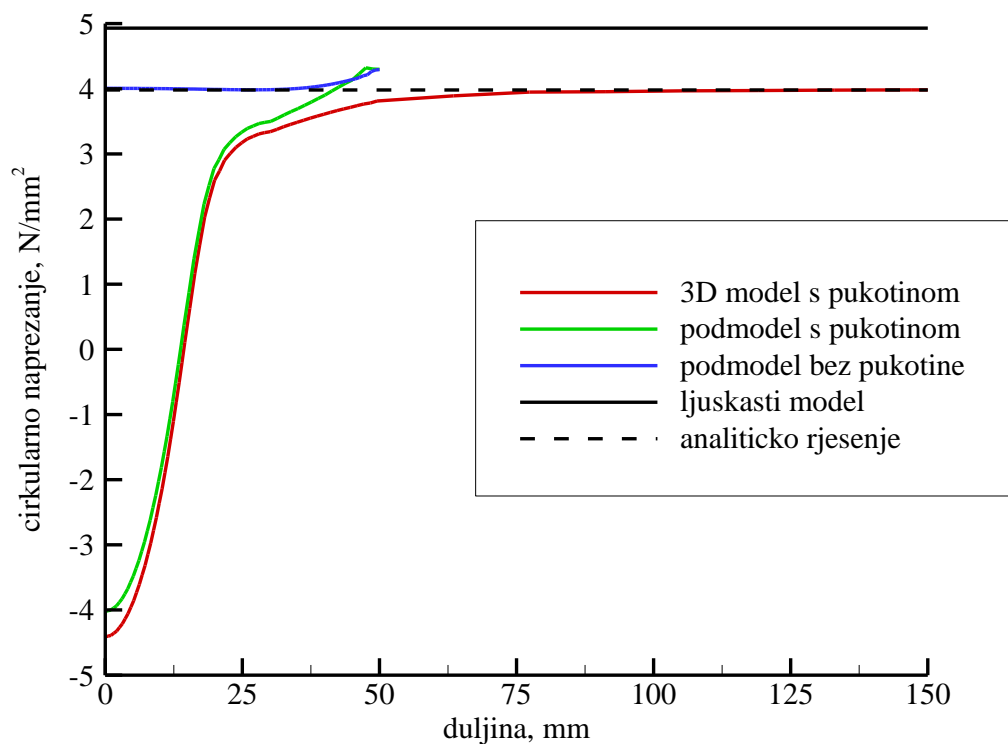
Na sljedeća četiri dijagrama prikazat će se radijalni pomaci i cirkularna naprezanja očitana po duljini i opsegu vanjske stjenke cijevi s početkom izvodnice u točki iznad vrha pukotine. Usporedit će se 3D model cijevi s pukotinom, podmodel s pukotinom, podmodel bez pukotine, globalni, ljuskasti model te analitičko rješenje. Raspodjela radijalnog pomaka vanjske stjenke redom po duljini i opsegu dana je na donjim slikama, slika 3.51. i slika 3.52., dok je raspodjela cirkularnog naprezanja vanjske stjenke cijevi po istim dionicama prikazana na slici 3.53. i slici 3.54.



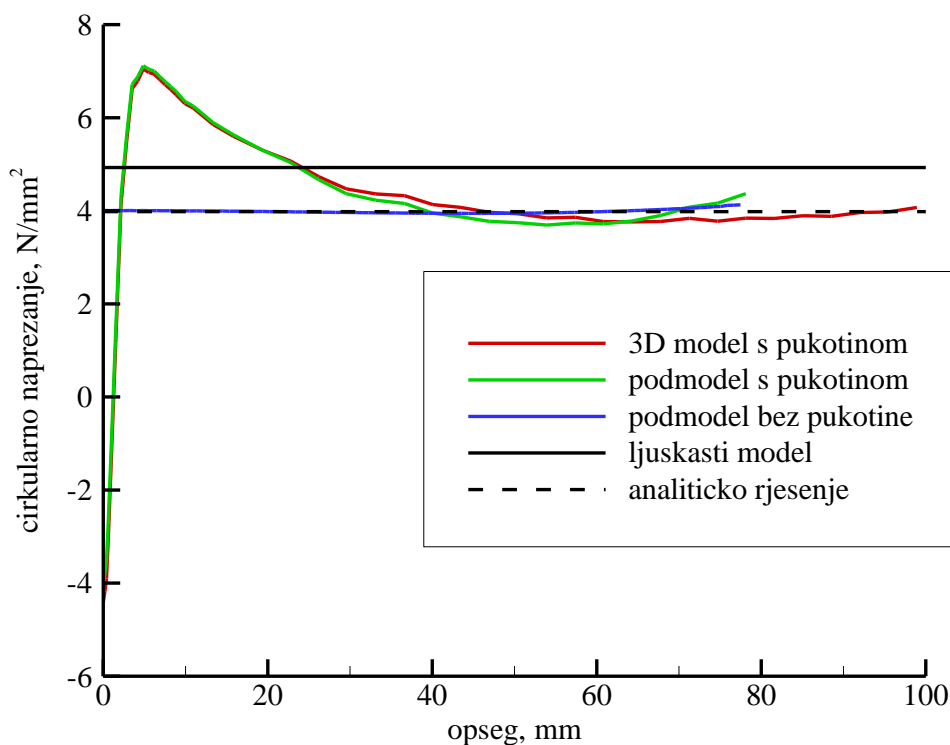
Slika 3.51. Raspodjela radijalnog pomaka vanjske stjenke cijevi po duljini



Slika 3.52. Raspodjela radijalnog pomaka vanjske stjenke cijevi po opsegu



Slika 3.53. Raspodjela cirkularnog naprezanja vanjske stjenke cijevi po duljini



Slika 3.54. Raspodjela cirkularnog naprezanja vanjske stjenke cijevi po opsegu

Uspoređujući radijalni pomak 3D modela i podmodela s pukotinom, slika 3.51. i slika 3.52., može se zaključiti kako za razmatranu deblostjenu cijev način podmodeliranja *shell-to-solid* ne daje osobito točne rezultate radijalnih pomaka, barem što se tiče duljine podmodela $s=3c$. Zbog prevelikih radijalnih pomaka globalnog modela koji kao rubni uvjeti pogone podmodel, dolazi i do prevelikih radijalnih pomaka samog podmodela. Za tanje bi cijevi rezultati globalnog modela bili točniji, te bi se unošenjem takvih rubnih uvjeta na podmodel činila i manja greška. S druge strane, cirkularna naprezanja prema slici 3.53. i slici 3.54. pokazuju veoma dobra slaganja.

4. Zaključak

Ispitivanjem konvergencije dokazalo se već poznato – kreiranjem sve gušćih mreža konačnih elemenata numeričko rješenje, bilo to naprezanje ili pomak, mora konvergirati prema točnom, analitičkom rješenju. Na primjeru osnovnog pravokutnog konačnog elementa sa čvornim kružnicama (CAX4) ustanovilo se kako brzina konvergencije pomaka ne uvjetuje uvijek konvergenciju naprezanja istom brzinom, iako su prema teoriji te dvije veličine usko povezane. Kao što je objašnjeno, ABAQUS naprezanja izračunava u integracijskim točkama unutar samog elementa te ih naknadno ekstrapolira u čvorove odakle ih korisnik programa očitava. Pomaci se s druge strane dobivaju direktno rješavanjem globalne jednadžbe konačnih elemenata $\mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{R}$ razmatranog problema, te tako dolazi do spomenutog odstupanja. Također je ustanovljeno kako za konačne elemente iste geometrijske skupine bržu konvergenciju, odnosno točnija rješenja za jednaki broj stupnjeva slobode pokazuju elementi drugog reda, tj. elementi s parabolikom raspodjelom pomaka po rubu stranice, nego što je to slučaj kod osnovnih elemenata čija je raspodjela pomaka po rubu linearna. Samim time je zaključeno kako pravilan izbor za opisivanje područja s velikim gradijentom naprezanja predstavljaju upravo parabolični elementi.

Prednosti i nedostaci tehnike podmodeliranja objašnjeni su prvo na primjeru podmodela bez pukotine, a zatim i na podmodelu s pukotinom. Što se prvog slučaja tiče, objašnjeno je kako zbog različitih opterećenja na unutarnjoj stijenci podmodela te stijenci globalnog modela dolazi do skokovite razlike u raspodjeli pomaka između dvaju modela, što dovodi do pojave savijanja ruba podmodela. Razlike u pomacima, a sukladno njima i jačine savijanja, tim su veće što se promatra podmodel deblje cijevi. Kako bi rezultati dobiveni podmodelom s pukotinom bili čim točniji, mnogo računa treba voditi i o njegovoj veličini. Kada bi on bio premalen, rezultati pomaka s globalnog modela mogli bi biti prilično netočni iz razloga što analizom na globalnom modelu nisu obuhvaćene koncentracije naprezanja koje bi se inače pojavile u tom području, dok bi prethodno spomenuto savijanje ruba moglo nepovoljno utjecati na same deformacije pukotine. S druge strane, preveliki podmodel mogao bi biti samo nepotrebno opterećenje za memoriju računala jer bi se ista rješenja mogla dobiti i s manjim podmodelom. Uvidjelo se kako radijalni pomaci razmatranog shell-to-solid podmodela s pukotinom duljine $s=3c$ upravo zbog njegove debljine prilično odstupaju od referentnog 3D *solid* modela cijevi s pukotinom. Točniji rezultati mogli bi se postići produljenjem podmodela na vrijednosti veće od $s=3c$. Za ovakav jednostavniji slučaj na rezultate 3D modela s lokalnim

profinjenjem mreže oko pukotine nije trebalo dugo čekati. Kada bi se takva analiza vršila na nekom složenijem konstrukcijskom elementu, potrebno vrijeme analize bi se drastično povećalo te bi takav pristup bio neopravdan. Ukoliko bi se primijetilo da *shell-to-solid* tehnika ne daje dobre rezultate, trebalo bi pokušati s nekom drugom tehnikom podmodeliranja, primjerice *solid-to-solid*. Takva procjena uvelike ovisi o znanju i iskustvu korisnika programa.

Literatura

- [1] Sorić, J., Metoda konačnih elemenata, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [2] Alfiredić, I., Nauka o čvrstoći II, Golden marketing, Zagreb, 1999.
- [3] Tonković, Z., Predavanja iz kolegija Mehanika oštećenja i mehanika loma, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2008.
- [4] Marenić, E., Skozrit, I., Tonković, Z., On the calculation of stress intensity factors and J -integrals using the submodeling technique, članak, Journal of Pressure Vessel Technology, vol. 132, 2010.
- [5] Lesičar, T., Diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2009.
- [6] Programski paket ABAQUS/STANDARD 6.9
- [7] ABAQUS 6.9 Documentation, Dassault Systèmes Simulia Corp.